PROBLEMATA DVO NOBILISSIMA,

QVORVM NEC ANALYSIN Geometricam, videntur tenuisse Ioannes Regiomontanus & Petrus Nonius; nec demonstrationem satis accuratam repræsentasse, Franciscus Vieta, & Marinus Ghetaldus, nunc demùm à Clemente Cyriaco diligentiùs elaborata, & nouis analyseon formis exculta. Inscriptiones præterea figurarum non iniucundæ.

ILLVSTRISSIMI AC REVERENDISSIMI IACOBI S. R. E. CARDINALIS PERRONII, Archiepiscopi Senonensis, &c. communis studiosorum Patris & patroni diuinis meritis

D. D.

PARISIIS,

Excudebantur apud Viduam DAVIDIS LE CLERC.

M. D. C. XVI.

ILLVSTRISSIMO
AC REVERENDISSIMO
IACOBO, S. R. E. CARDINALI PERRONIO, ARCHIEPISCOPO Senonensi, Galliarum ac Germaniæ Primati, magno Franciæ eleemosynario, &c.

PATRONO MEO OPT. MAX.

SCRIPTIS consignatum reliquit Olaus Gothus (nescio quàm verè) in locis Aquilonaribus, quæ gelu ferè perpetuo rigent, hirundines non raro pro piscibus, à piscatoribus, glacie perrupta extrahi; ita agglomeratas vt rostra rostris conserta, et pedes pedibus connexos habeant; atque illos glomos hypocausto illatos, blando eius calore sensim animari, et volitare; nec multo pòst (quia nihil intempestiuum, ætatem perfert) à vitâ deseri. Veritus sum sæpenumerò (Cardinalis amplissime) ne mihi simile quid accidisset; ac ne citiùs

quàm par fuisset, munificos benignitatis tuæ radios, amicorum commendatione fretus, excepissem. Quamuis enim consultum mihi videbatur: si tuam beneficentiam primo quoque tempore experirer: nihilo tamen minùs expediebat rationibus meis, vt acceptum à te beneficium non vulgare, aliqua grati animi significatione publicè testarer; ēt voluntatem quâ in me propendebas, maiori tum studio tum diligentiâ retinerem. Vtrumque tametsi in optatis haberem, prohibuit temporum insecuta conditio, et valetudinis meæ imbecillitas. Nam rebus Galliæ nostræ veluti in fermento cubantibus, ego totum biennium, molestissima grauedine conflictatus sum: deinde arquato morbo tentatus, grauioribus etiam iecinoris vitijs laboraui. Ne nunc quidem valeo satis bellè. Verumenim-verò per has sonticas causas non stetit, quò minùs ad Geometricam inuentionem accommodatas institutiones commentarer; et nouas analyseon formas excogitarem, quibus innumera problemata in Algebricas quadratorum, et (ex parte) quadratoquadratorum æquationes recidentia, Geometricè absolui possent. Hic plerúmque solidorum et planoplanorum comparationibus, se excruciarunt Analytæ: ego solam planorum

comparationem vſurpo ; et ſex potiſſimùm eorumdem problematum claſſes diſtinguo. Vniuerſum opus, ampliſſimi tui nominis ſplendore ornatũ, publici iuris facere decreueram, niſi rei meæ familiaris tenuitas obſtitiſſet. Quod potui in præſentiâ, duo inde excerpſi problemata à ſummis viris ita tractata, vt ſumma ijs manus nondum acceſsiſſe videatur. Planorum additionem, ſubductionem, et reliqua Analyticæ præcepta callentibus ſatisfaciet genus argumentandi quo iſtos à nonnullis exiſtimatos Gordij nodos expedio: cæteri artis expertes vix illud percipient. Dum tibi (Cardinalis Optume maxume) probetur meum ſtudum ; cæteros non tantoperè moror. Rerum Mathematicarum quàm peritus eſſes, fidem mihi feciſti doctiſſimo colloquio: cùm præter multos Ariſtotelis locos à librarijs vel interpretibus male habitos, à te quomodo emendari debeant, indicatos ; tuam etiam in Ptolemæi lectione incredibilem diligentiam comprobaſti. Hæc tamen ad alias quibus circumfluis, perexigua laus eſt. Theologorum veterum qui Latina, Græca, vel antiquioribus linguis vſi ſunt ; recentiorum item qui in eo ſcripti genere excelluerunt, neminem non pervolutaſti et

excußisti. Hominum millia à vero dei cultu alienißima, deo subiecisti, et piorum cætui adiecisti. Paupertatis incommodis circumuentos plurimos liberasti. Re, aut consilio, quotquot te adierunt, iuuisti. Quæ omnia in ore et in oculis sunt præsentium; neque absentium ferè quemquam latent: ad posteritatis autem memoriam, ea propagare, non vnius, alteriúsve scriptoris refert; verumetiam cuiuslibet. Ac profectò si quid grandiori oratione aut carmine valerem; tantarum laudum præco, aut buccinator forem. Sed ψυχῆς γλωσσοκομεῖον *paupertas, et valetudo mea cum ætate ingrauescens, mihi aurem vellũt, et insusurrant; vt te, et tui amantißimũ fratrem (qui vni tibi cedit, reliquis omnibus facilè antecedit, humanitate, grauitate, prudentia) maiorem in modum rogatos velim; partem aliquam curæ et cogitationis vestræ, meis ærumnis subleuandis, vel omninò tollendis impertire dignemini. Et quia veluti gemella quædam astra, ac prosperi Castores mihi affulsistis; satis alterum compellabo, quando vnum te subjectis versiculis appellabo.*

Conijce quid velit hoc (Præsul sanctißime) carmen:
Paupertas, linguæ viuida plectra ligat.

Ζῶντι ἔοικα λίθῳ· Πενίας καὶ δυσμόρου αἴσης
Ψυχῆς τ' οἷδε στίχοι ἔκτυποί εἰσι νόου.

אני אביון כפי דומה לשוני
לך משכיל ושכלת רצוני

Tuis diuinis & immortalibus meritis tuus,
CLEMENS · CYRIACVS.

INVIDIÆ DEPRECATIO.

Nisi quis malit, Præfiscini, aut præfiscinè.

EX *Horatij lyrici præscripto, vineta egomet cædam mea; priusquàm aliena putem aut perputem. In diagrammate vltimi problematis omitti potuit circuli descriptio, & linearum G A, & A D, inscriptio: quemadmodum in demonstratione, minimè necesse fuit docere, angulum F N M, esse æqualem angulo G A D. Sola enim definitio figuræ ordinariæ vel regularis; & quinta primi Elem. Eucl. scopum argumentationi propositum attingunt. Sed hæc rudioribus etiam ingenijs non sunt fraudi: vt neque illud fortasse quod iubeo in eiusdem problematis structura duci lineam M N, æquidistantem lineæ D F: tametsi non iubeam ita duci vt secet latus F G. Nam figura ipsa & argumentationis contextus satis id admonent; si modò pleonasmum vnum sustuleris, quo iubetur postea rescindi N G, quæ iam rescissa sit. In eadem figura scalptoris mendum est littera O, pro littera Q, inter duas D, & R, proximas. Littera quoque P, in figura paginæ nonæ, sub littera F, ad perpendiculum, derasa vel detrita. Typopgraphi menda sunt*

Pag. 2. *linea* 21	solitus, Marinus		solitus. Marinus
Pag. 5. *lin.* 5.	puncto D,		puncto M,
Pag. 6. *lin.* 32.	æquistet		æquidistet
Pag. 9. *lin.* 21.	D B, & B F	Pro	D F, & B F
Pag. 12. *lin.* 26.	erit C linea		erit dimidium C lineæ
Pag. 16. *lin.* 26.	in lineam G. Aufe-		in lineam G & solido ex D, in C, in A. Aufe-

Pag. 18. *lin.* 18. *in nonnullis exemplaribus littera I, pro litera L, vitiosè scripta est. Leuioribus reliquis facile ignosci poterit: cùm præsertim anni à Christo,* 1616. *contractioribus diebus excudendum dederim libellum, neque per noctes licuerit, operarum errata suis locis omnia restituere.*

AD DVO NOBILISSIMA PROBLEMATA A NOBILISSIMIS MATHEMATICIS, REGIOMONTANO, Nonio, Vieta, Ghetaldo tractata,

CLEMENTIS CYRIACI Animaduersiones & Analyses.

CAPVT PRIMVM.

FRANCISCI VIETÆ ET ALIORVM TESTIMONIA PROFERVNTVR E QVIBVS problematum à nobis susceptorum nobilitas cum difficultate conjuncta elucescit.

IN responso ad clarissimum virum Adrianum Romanum Belgam, Franciscus Vieta vir ipse ingenio propemodùm diuino & doctrina singulari admirabilis, hæc scripsit: *Quæ problemata Algebricè absoluit Regiomontanus, is se non posse aliquando Geometricè construere fatetur. An non ideo quia Algebra fuit hactenus tractata impurè?* Et in Appendice priore ad Apollonium Gallum, eadem verba ita confirmat: *Dixi quædam esse problemata quorum Geometricam constructionem se nescire ait Regiomontanus, quanquam Algebricè, vt loquitur, ea explicet. Consulatur liber suus* (secundus fortasse) *de Triangulis. At Algebra quam tradidere Theon, Apollonius, Pappus & alij veteres Analistæ* (Analytæ rectius) *omninò Geometrica est, & magnitudines de quibus quæritur, siue re, siue numero statim exhibet, aut erit, &c.* Itaque ab hoc præstantissimo viro admonitus consului secundum librum de Triangulis Regiomontani, & ad propositionem

duodecimam à Regiomontano scriptum reperi, *Hoc problema, Geometrico more absoluere non licuit hactenus, sed per artem rei & census, id efficere conabimur.* Et ad propositionem vigesimam tertiam eiusdem libri, *Per artem rei & census, hoc problema absoluemus.* Vocat nimirum Regiomontanus artem rei & census, quam plerique scriptores Algebram. De quo nomine, vt & alijs iam receptis, gaza, parasangis, mapalibus, non est huius loci disputatio. Cæterùm Francisco Vietæ adstipulatur Petrus Nonius, non potuisse affirmans hæc problemata Geometricè à Regiomontano expediri. *Vemos algunas vezes no poder vn gran Mathematico resoluer vna question por medios Geometricos y resoluer la por Algebra siendo la misma Algebra sacada de la Geometria, que es cosa de admiracion.* Videas vsu venire (inquit) vt doctissimus alioquin Mathematicus non possit Geometrica ratione expedire problema, quod Algebræ tamen beneficio dissoluat. Eáque res non paruam habet admirationem cùm Algebra ex ipsis Geometriæ fontibus profluxerit. Et paullò post, Regiomontani disertè meminit & similia eius duobus problematis, alia duo idem Nonius Algebricè resoluit, quod si Geometricè præstare potuisset, videtur non prætermissurus fuisse. Erat enim, Christophoro Clauio teste, vir acerrimi ingenij, & sua tempestate in Mathematicis, nullo inferior, seuerè in alios animaduertere, & si quid rectius nouerat, impertire solitus, Marinus denique Ghetaldus & ipse non semel ab eodem Clauio nec immeritò laudatus, vt pote in quo perspicacitas ingenij cum doctrinæ perspicuitate certet, Variorum problematum initio sic præfatur, *Inter problemata quæ construere aggredior, sunt quædam Ioannis Regiomontani, quorum Geometricam constructionem ipse non exhibet, quamuis ea Algebricè vel per sinus explicet. At problemata quæ Algebricè explicari possunt, dum modo quadratorum metam, æquationes non excedant, possunt quoque Geometrica ratione construi: qua methodo quáve ratione in libro de resolutione & compositione abundè explicabimus.* Octauus annus præterijt cùm huius libri magnam expectationem concitauit Ghetaldus: Vtinam datam publicè fidem aliquando liberet. Nos interim quæ Deo inspirante & laboribus adspirante excogitauimus ad duo illa: Regiomontani problemata Geometricè absoluenda proferemus in medium. Duo enim sunt dumtaxat problemata, quorum, Geometricam structuram sibi ignotam esse Regiomontanus testatur, duodecima & vigesima tertia propositione libri secundi de Triangulis: Reliquorum quæ per sinus explicantur, Geometrica ratio & constructio ex ipsomet auctore, non ita magno negotio potest elici.

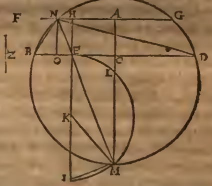
CAPVT II.

Referam, deindè tribus animaduerſionibus ſupplebo Franciſci Vietæ verbis conceptum & conſtructum problema, quod idem è duobus Regiomontani prius eſt.

Data baſe, altitudine et ratione crurum trianguli, inuenire triangulum.

Oportebit autem, cùm baſis ſecabitur pro ratione crurum, & rectangulum quod fit ſub ſegmentis, adplicabitur ad altitudinem, quod inde orietur, maius eſſe differentia ſegmentorum baſis.

Sit data trianguli baſis B D, altitudo Z, ratio crurum vt S, ad R. Oportet inuenire triangulum. Baſis B D ſecetur bifariam & ad angulos rectos in C à recta A C quæ ſit ipſi Z æqualis, & per A agatur F A G ipſi B D parallela. Eadem baſis B D ſecetur in E, ratione crurum, vt ſit B E ad E D, ſicut S ad R, & agatur H E ipſi A C æqualis & parallela: & ita producatur in I vt quod fit ſub H E, E I, ſit æquale ei quod fit ſub B E, E D, & ſecetur E I bifariam in K, & centro K, interuallo E K vel K I deſcribatur circulus quem A C, continuata ſecet in punctis L, M, aut demum contingat in M. Secabit enim aut continget circulum illum A C, quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter, erit æqualis ipſi E C, cui ex cautione adiecta problemati præſtabit, aut



demum erit æqualis E K ſemidiameter circuli. Denique acta M E, ſecet F G in N & connectantur B N, N D. Triangulum igitur conſtructum eſt B N D,

cuius basis est data BD, in quam cadens perpendicularis N O sit ipsi A C seu Z datæ æqualis, connectatur autem I M. Sunt igitur triangula similia rectangula N H E, I M E, & est vt N E ad I E ita H E ad E M. Quod sit itaque sub N E, E M æquale est ei quod fit sub H E, E I, id est rectangulo sub B E, E D. Quare puncta N, B, D, M, sunt in circulo. In eo autem subiensa B D secatur bifariam ad rectos angulos ab A C quare sectio est per centrum, & sunt peripheriæ æquales B M, M D, Angulus igitur B N E, angulo E N D, est æqualis, & ideo est B N ad N D, sicut B E ad E D, Triangulum igitur B N D descriptum est sub data basi B D, cuius altitudo N O, æqualis est imperatæ Z seu A C, & B N ad N D se habet vt B E ad E D seu vt S ad R. quod faciendum erat.

ANIMADVERSIO PRIMA.

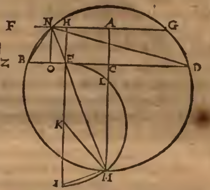
VERBA illa inter propositionem & constructionem problematis media, è medio fortasse tollenda sunt. Præ se ferunt enim quamdam exceptionis non legitimæ speciem, eóque magis, quod in ipsa constructione legamus tangi aut secari circulum intervallo K I descriptum, ex cautione adiecta problemati: quasi linea rectis angulis à media basi descendens eum circulum aliquando effugiat. Atqui non tam cauendum quam demonstrandum illud videtur.

Si ad perpendiculum Trianguli adstruatur planum sub segmentis basis pro ratione laterum sectæ: & inde orta linea constituatur ad rectos angulos infra basim, dictæ iam sectionis puncto: semicirculus supra lineam ita constitutam descriptus, occurrit lineæ quæ à medio basis puncto descendens, priori æquidistat.

PLANVM ad lineam aut solidum ad planum struere vel adstruere, mihi est idem quod alijs applicare: Et plani ad lineam, vel solidi ad planum structura, aut adstructio mihi eadem est, quæ alijs applicatio. Cum ad Euclidem lector ablegatur, Euclides ex vltima Christophori Clauij editione consulendus est.

Triangulo igitur cuius inæqualium laterum, vt à Vieta descriptum est B N D, circumscribatur ex 5 p l. 4. circulus B N D M, & angulum ad verticem N, secet in semisses recta N E M; basim B D, puncto E,

secans, secat igitur ex 3. p. l. 6. eamdem basim pro ratione laterum trianguli A medio autem basis puncto quod sit C, demittatur ad circumferentiam angulo verticis oppositam recta C M, sintque anguli B C M & D C M recti: constat ex 30. p. l. 3. circumferentiam B M D puncto D, sectam esse in semisses. Recta verò N E M bifariam secans angulum tum huic circumferentiæ, tum basi oppositum, habet punctum M commune cum linea C M, siquidem æquales anguli B N M, & D N M, æqualibus circumferentijs D M, & B M insistunt, Erigatur iam ex E puncto, perpendiculum E H, quod æquale sit perpendiculo N O, à vertice trianguli in basim demisso, connectatúrque recta N H ; Erit



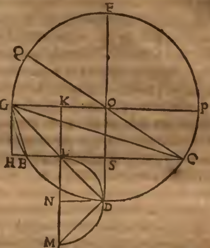
ex 33. p. primi, parallelogrammum rectangulum N O E H: & ex 34. p. eiusdem, sectum in duo æqualia triangula rectangula N O E, N H E. Continuetur H E, in I, vt rectangulum sub H E, & I E, æquale sit rectangulo sub E B & E D segmentis basis pro ratione laterum sectæ; Aio semicirculi supra lineam I E descripti circumferentiam occurrere puncto M. Connectatur enim recta I M, eruntque triangula N H E & I M E similia, quandoquidem rectangulum parallelogrammum sub N E & E M, æquatur rectangulo parallelogrammo sub E B. & E D. per 35. p. l. 3. At ex fabrica rectangulum sub H E, & I E, æquatur rectangulo sub E B & E D. Itaque per 9. p. l. 5. rectangulum sub N E & E M, æquatur rectangulo sub H E & I E, & per 2. partem 16. p. l. 6. N E se habet ad H E, vt I E ad E M, cumque anguli N E H & I E M ad verticem æquales sint; erunt per 6. p. l. 6. triangula N H E & I M E æquangula; & homologa latera N E, & I E, opponentur æqualibus angulis: rectus autem fuit angulus N H E, ergo & I M E rectus erit. Et per ea quæ demonstrantur ad 31. p. l. 3. semicircumferentia supra rectam I E descripta per angulum rectum transibit, hoc est puncto M, quod rectis N E M, & M C commune est, occurret. Cumque æquidistet recta M C rectæ I E, demonstratum est, quod oportuit.

ANIMADVERSIO II.

Differentia segmentorum basis pro ratione crurum sectæ, aliàs æqualis est latitudini quæ oritur ex plano sub ijsdem segmentis ad perpendiculum adstructo; aliàs minor, numquam maior.

HANC differentiam dicta latitudine minorem exposcunt verba inter propositionem & constructionem problematis à Francisco Vieta interiecta: eidem æqualem admittunt, quæ inserta sunt constructioni. Ne quis imperitior hìc hæsitet, doceo quod proposui. Distinguatur circulus aliquis in quadrantes à dimetientibus G O P, F O D: & connectatur recta D G. Et quia angulus F O G ad centrum insistit quadranti totius circumferentiæ & rectus est: angulus F D G ad circumferentiam constitutus, insistensque eidem quadranti, semirectus erit. Per quoduis rectæ D G punctum quod sit aliud ab extremis, vt L, agatur recta B L S C æquidistans dimetienti G O P, & connectantur B G, C G: secabit recta G L D, angulum B G C oppositum circumferentiæ B D C, in semisses B G D & C G D: siquidem recta O S D, à centro ducta secat rectam B S C æquidistantem rectæ G O P, ad rectos angulos, ac propterea, circumferentiam B D C in semisses, D B, D C, quibus anguli B G D & C G D æquales insistunt. Et per 3. p. l. 6. recta B L C, puncto L, secatur pro ratione crurum trianguli B G C, estque B L ad L C quemadmodum B G ad G C. Quia verò angulus C B G obtusus est, vtpote in segmento minori quàm sit semicirculus G D P, cadet perpendiculum G H à vertice trianguli in basim C B productam extra circulum, versus H. Et è puncto L, erectum L K, ipsi æquale, constituet angulum G K L, cum recta G K P, etiam rectum, propter æquidistantes G K P, & B L C. Fiat iam adstructio plani sub segmentis B L & L C ad perpendiculum K L, oriaturque latitudo L M, & connectatur M D. Triangulum igitur L D M rectangulum est, & per illius verticem transit semicirculus L D M, supra latitudinem ortiuam L M. descriptus: cúmque rectæ K L M & O S D æquistent; alterni anguli S D L, & M L D sunt æquales & semirecti, quare etiam angulus L M D semirectus est; & æqualibus angulis æqualia crura L D, &

M D opponuntur: atque per 26. p. l. 1. demiſſum à vertice perpendiculum D N, incidet baſeos L M, puncto medio N, & ad æquidiſtantem O S D erectum quoque erit, necnon eadem O S D, ſemicirculum tanget in D. Atque in parallelogrammo rectangulo N D L S, aduerſa latera N D & L S inter ſe æquabuntur. Eſt autem L S dimidia ſegmentorum baſis pro ratione crurum ſectæ differentia. Ex altero enim ſemiſſe S C reſecari poteſt, initio facto à C, aliud ſegmentum quod ſit ipſi B L æquale; ac propterea relinquet æqualem lineam rectæ L S: Itaque maius ſegmentum ſuperat minus, dupla rectâ L S: & duplus radius N D ſiue dimetiens L M, æquatur duplæ L S, hoc eſt differentiæ ſegmentorum in quæ ſecatur baſis pro ratione crurum.



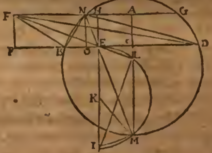
A puncto C per centrum O, ducatur tertia circuli dimetiens C O Q. Si ergo connecteretur recta B Q, angulus ad B, rectus foret, vtpote in ſemicirculo. Inter G, autem & Q, ſumpto alio quouis puncto circumferentiæ, ſi ad illud tanquam trianguli verticem, ab extremis rectæ B C punctis, aliæ rectæ lineæ ducerentur, conſtat angulum ad B, fore obtuſum, vtpote in ſegmento minori quàm ſit ſemicirculus Q D C. At inter puncta Q F, ſumpto quouis alio circumferentiæ puncto, & adiunctis ad illud, duabus rectis quæ terminentur extremis rectæ B C punctis, conſtituetur acutus ad B angulus: Vt qui ſit in ſegmẽto maiori quàm ſemicirculus Q D C. His autem tribus triangulis, & alijs quotlibet baſim B C habentibus, & vertices inter circumferentiæ puncta G & F; commune eſt, vt lineæ quæ ab eorum verticibus ducuntur ad punctum D, ſiue lineæ quæ verticum angulos bifariam ſecant, inter lineas G D & F D cadant, ac propterea cum dimetiente F D, angulos minores ſemirecto G D F comprehendant. Verumenimverò triangula quorum baſis B C, vertices autem in circumferentiæ punctis inter G & B, omnia ſunt ad B obtuſangula, & lineæ quæ verticũ angulos ſecant in ſemiſſes, conſtituunt ad dimentientem F D, angulos maiores ſemi-

recto G D F. Nec possunt acutis angulis ad punctum D, maioribus aut minoribus semirecto, æquales & alterni qui ad æquidistantes dimetienti F D, à lineis verticum angulos bisecantibus constituentur, insistere quadrantibus circulorum: Sed arcubus maiorem aut minorem ad suos semicirculos rationem habentibus, quam habeat arcus D M, ad semicirculum L D M. Et quod de triangulis basin B C habentibus dictum est, idem de quibuslibet alijs, bases infra dimetientem G P & basi B C æquidistantes habentibus, intelligitur. Quorum enim vertices in puncto G, obtusangula ad bases erunt; & verticum anguli in semisses à recta G D secabuntur. Cúmque ad perpendicula fiet adstructio planorum sub segmentis in quæ secabuntur bases pro ratione crurum; & in latitudinibus oriundis describentur, vt dictum est, semicirculi, tangentur omnes à dimetiente F D. Et ipsæ latitudines differentijs segmentorum, in quæ bases ita sectæ erunt, æquabuntur. Reliquis triangulis in alio circumferentiæ puncto quod non sit G, vertices habentibus siue basis eorum sit dimetiens G P, siue ipsi æquidistans alia quæuis circulo inscripta; hæc non conuenire, ex angulis quos cum dimetiente F D constituunt lineæ, bisecantes verticum angulos, facile quiuis deprehenderit. Quin-etiam satis constat, perpendicula omnia à quibuslibet semicircumferentiarum punctis præter medium in dimetientes subtensas demissa, radijs minora esse. Sunt enim semisses rectarum circulis inscriptarum quas eædem dimetientes ad rectos angulos secant: Omnium autem circulo inscriptarum maxima est dimetiens; & radius, cuiusuis alterius inscriptæ semisse maior ex 15.p.l.3. & 15.p. l.5. Quando igitur dimetiens F D secat aliquam semicircumferentiam in æquidistante vt monuimus linea descriptam. (Secet verò necesse est quoties non tangit) perpendicula in eamdem semicircumferentiæ subtensam, à punctis sectionum demissa, æquidistant & æqualia sunt, dimidiæ segmentorum basis pro ratione crurum sectæ differentiæ, minora tamen sunt radio, & eorum dupla minora dimetiente, & tota segmentorum differentia minor latitudine orta ex adstructo plano sub segmentis, ad perpendiculum. Itaque numquam maior est eadem differentia quàm dicta latitudo: sed vt proposueram, æqualis vel minor.

ANIMADVERSIO III.

Quando à media basi descendens linea secat semicirculum, tria hæc in duobus distinctis triangulis sunt eadem, basis, perpendiculum & ratio laterum.

Lineam à media basi descendentem & semicirculum vt prius descriptum intelligimus. Perpendiculum vocamus idem, quod alteri æquale sit, non quod ab eodem vertice demittatur. In figura igitur quam Vieta descripsit, linea C L M, secat semicirculum E L M I, punctis L, & M. Et linea M E N ducta per punctum E, in quo basis secatur pro ratione laterum, occurrit vertici trianguli B N D: & ipsum triangulum, huius lineæ beneficio potissimum exhibetur. At vero ducta per punctum L, & idem punctum E, recta linea, occurrit ei quæ per verticem trianguli æquidistans basi ducitur, in alio puncto vt F. Cùm enim in triangulo rectum habente angulum E C L, angulus E L C, minor sit recto; anguli N A L, & E L A, constituti ad eamdem rectam A L, minores sunt duobus rectis; ac propterea lineæ A N, & L E concurrent in aliquod punctum F, quod est vltra N: siquidem recta L E F, secat lineam N E M; neque puncto N, aut vlli quod sit inter N, & A, occurrere potest: alioquin duæ rectæ lineæ spatium concluderent, contra pronuntiatum 14. lib. 1. Ductis igitur D B & B F, constitutum erit aliud triangulum B F D, à quo demissum in basim B D productam, perpendiculum F P, æquidistabit O N perpẽdiculo. Et quia sunt F N, & B O æquidistantes; æqualia erunt inter se hæc perpendicula. Quadratum autem lateris F D æquale quadratis F P, perpendiculi & lineæ P D, maius est latere N D, cuius



quadratum æquale est tantùm quadrato perpendiculi N O, & lineæ O D, quæ minor est quàm linea P D. Et quia latus N D adiacet ma-

iori basis segmento E C D: latus autem N B, minori eiusdem basis segmento E B; latus N D, maius est latere N B. Et triangula B N D, & F B D, quorum est eadem basis B D; nec-non vnum vnius latus maius maiori latere alterius, distincta esse constat; quamuis altitudinem habeant æqualem. Dico & rationem laterum eamdem esse in vtroq; iungatur enim I L. Sunt igitur triangulorum F H E, & I L E, anguli ad H. & L, recti; nec-non æquales ad verticem F E H, & I E L: quare similia sunt triangula: & vt F E ad E H, ita est I E ad E L; & rectangulum sub extremis, æquale rectangulo sub medijs, nempe rectangulum sub F E, & E L, æquale rectangulo sub H E, & I E: fuit autem ex Vietæ constructione rectangulum sub H E & I E, æquale rectangulo sub segmentis basis E B, & E D: quare rectangulum sub F E, & E L, eidem rectangulo sub segmentis basis, æquale est. Et ex scholio 35. p. l. 3. per tria quælibet, horum quatuor punctorum F, L, B, D, descriptus circulus etiam per quartum transit: hoc est, si triangulo F B D, circumscriberetur circulus; eius circumferentia etiam per punctum L, transiret atque ex 30. p. eiusdem 3. lib. recta C L, bifariam secarêt circumferentiam B L D: ex quo intelligitur, angulum B F D secari in semisses B F L & D F L, à recta F E L, quæ ideo puncto E, secat basim B E D, pro ratione laterum, vt sit B E ad E D, quemadmodum B F ad F D: fuit autem & B N ad N D quemadmodum B E ad E D. Quando igitur à media basi descendens linea secat semicirculum, tria hæc in duobus distinctis triangulis sunt eadem, basis, perpendiculum, & ratio laterum. Vtrumque porrò triangulum, potest obtusangulum ad basim esse: quoties nempe alterum eorum in diagrammate secūdæ animaduersionis, basim habet quamcumque circulo inscriptam, infra dimetientem G O P, ipsi G O P æquidistantem, veluti B C; nec-non verticem inter punctum G, & aliud circumferentiæ punctum, à quo per centrum, recta linea perueniat ad vnum æquidistantis extremum, quemadmodum à puncto Q, recta Q O C peruenit ad vnum rectæ B C extremum. Regiomontanus & Nonius contracto ad ea triangula problemate, intra quæ perpendiculum cadit; ambiguitatem vt mox videbimus, effugerunt.

CAPVT III.

Eiusdem problematis tres Analyses, vna ex Regiomontano Algebrica, reliquæ duæ ei respondentes, Geometricæ.

ANALYSIS I.

NON annumerabo Regiomontani verba; sententiam appendam. Sit igitur perpendiculum datum numero, 5. basis, numero 20. ratio minoris lateris ad maius sit eadem quæ est ternarij ad quinarium. Statuo differentiam segmentorum basis à perpendiculo factorum, esse duas radices: reliqua linea minoris segmenti dupla, valebit 20. demptis duabus radicibus. Itaque minus segmentum valet decem, dempta vna radice. Maius autem segmentum valet decem, plus vna radice. Quadratum minoris segmenti efficitur quadratum aliquod auctum numero, 100. deminutum 20. radicibus. Et addito numero, 25. quadrato perpendiculi, euadit minoris lateris quadratum æquale vni quadrato plùs numero 125. demptis, 20. radicibus. Iam verò maioris segmenti quadratum efficitur quadratum aliquod plus 20. radicibus addito insuper centenario. Cui si accedat perpendiculi quadratum, euadet ea summa æqualis quadrato maioris lateris, nempe vni quadrato plus 20. radicibus addito insuper numero 125. Et prior summa ad posteriorem siue minus quadratum ad maius, habet rationem quam 9. ad 25. duplicatam videlicet laterum rationem. Ducatur quartus analogiæ terminus in primum, & exiltent 25 quadrata demptis radicibus quingentis, addito numero absoluto trium millium, centum viginti quinque, æqualia videlicet summæ quæ procreatur ex tertij termini per secundum multiplicatione. Ea verò complectitur 9. quadrata, centum octoginta radices cum absoluto numero mille, centum, viginti quinque. Auferantur & addantur æqualibus æqualia ex artis præceptis quæ hoc loco tradere non instituimus, & tandem æqualitas existet, vt voluit Regiomontanus, inter 16. quadrata cum absoluto numero duorum millium; & inter sexcentas octoginta radices; aut vt Nonio & Vietæ æqualitates eiusmodi placuit enunciare, inter sexcentas octoginta radices, demptis 16 quadratis; & inter absolutum numerum duorum millium. Valor

autem vnius radicis emerget, octoginta quinque quadrantum dempto surdi quadrati latere, quinquies millies nec non ducentarum, viginti quinque decimarum sextarum. Et quadratum minoris lateris capiens quadringenta, septuaginta octo integra cum octaua integri parte, dempto latere surdi quadrati capientis 16. integrorum myriadas, quinquies mille & trecenta viginti duo integra cum 17. sexagesimis quartis partibus vnius integri, ad quadratum maioris lateris capiens mille, trecenta, viginti octo integra, cum octaua vnius parte, dempto latere surdi quadrati capientis centum viginti septem integrorum myriadas, quinquies mille & sexcenta triginta quatuor integra cum vnde quinquaginta sexagesimis quartis vnius assis siue integri partibus, rationem habet quam 9. ad 25. Myrias vna æstimatur decies mille vnitatibus.

Analysis II. ad solidorum comparationem perueniens.

IN hac Analysi & reliquis Algebricas sequentibus vocalis A semper ignotas magnitudines significat litteræ consonantes significandis magnitudinibus datis & cognitis inseruiunt. Additionis, subtractionis, ductus, multiplicationis, adstructionis & sectionis præcepta ex institutionibus petenda sunt, nec longè ab Algebricis discedunt.

Sit igitur perpendiculum datum B, data basis C, & ratio minoris lateris ad maius vt lineæ D ad lineam F. Statuatur differentia segmentorum basis à perpendiculo factorum, esse dupla, A linea. Reliqua igitur è basi, aut linea dupla minoris segmenti erit C, linea minus dupla A. Et ipsum minus segmentum erit C, linea deminutum linea A. Cuius segmenti quadratum efficitur quadrans C, quadrati auctus quadrato A, deminutus rectangulo ex C in A. Et addito B perpendiculi quadrato, ea summa æquabitur quadrato minoris lateris. Quadratum verò maioris segmenti auctum perpendiculi quadrato æquabitur quadrato maioris lateris, eritque summa planorum huiusmodi: B quadratum iunctum quadranti C quadrati & quadrato A, nec non rectangulo ex C in A. Prior autem summa ad posteriorem, siue quadratum minoris lateris ad maioris lateris quadratū habet duplicatam rationē lineæ D ad lineam F, hoc est, si post duas D, & F, sumatur tertia proportionalis G: erit minoris quadrati

C $\frac{1}{2}$

ad maius eadem ratio quæ est D lineę ad G lineam Et magnitudines ortę ex quarto analogiæ termino in primum, æquabuntur magnitudinibus ortis ex tertij termini ductu in secundum: Solida nimirum rectangula ex G in B quadratum, ex G in quadrantem C quadrati, ex G in A quadratum, dempto solido rectangulo ex G in C in A, æquabuntur solidis rectangulis ex D in B quadratū, ex D, in quadrantem C quadrati, ex D in A quadratum, nec non ex D in C in A. Quòd si addantur & adimantur æqualibus æqualia, etiam æqualitatem inter ea quæ supererunt versari necesse est. Fiat vtrobique additio solidi rectanguli ex G in C in A. Et demantur vtrimq; tria prima posterioris partis solida, quę altitudines habent minores, & bases easdem cum solidis prioris partis: quod nihil aliud est, quàm minorem altitudinem D, à maiori, G, auferre, vt relinquatur, H, linea in easdem bases ducenda. Tunc profecto æqualitas existet inter reliqua solida, H in B, quadratum, H in quadrantem C quadrati, H in A quadratum: & inter G plùs D, in C, in A. Rursus ablato vtrimque solido ex H, in A quadratum, factáque insuper plani ex G plùs D, in C, astructione ad lineam H, vt oriatur latitudo L: alia efformabitur æqualitas inter H, in B, quadratum & H in quadrantem C quadrati; & inter H, in L, in A, dempto solido ex H in A quadratum. Cúmque vtriusque partis altitudines sint eædem, æqualitas quoque erit inter bases, B quadratum auctum quadrante C quadrati, & inter rectangulum L, in A, deminutum A quadrato. Contrahantur B, quadratum & quadrans C quadrati, in vnum quadratum, constituta videlicet B, linea ad rectum angulum cum dimidia C, vt maximum trianguli latus oppositum recto angulo sit, M, cuius quadratum propterea æquabitur rectangulo ex L, in A, dempto A quadrato, siue rectangulo ex A in L, deminutam ipsa A: eritque vt A, ad M, ita M, ad L, deminutam A linea. Et ex data M, trium continuè proportionalium media, & extremarum summa L, etiam data, inuenientur extremæ quarum minor erit A. Cùm enim linea M, inuenta fuerit maior quàm dimidia C, etiam maior erit parte dimidiæ C, quæ est A, siue dimidia segmentorum baseos à perpendiculo sectæ differentia quæsita. Adnotauit autem Petrus Nonius Algebræ suæ parte prima, capite quarto, & ex Nonio Christophorus Clauius Algebræ suæ capite duodecimo eam æquationis formam qua Radices deminutę quadrato, æquantur absoluto numero, explicari Geometrico problemate, quo data recta linea ita secatur, vt alia data recta huius semisse non maior, continuæ

proportionis medium locum teneat inter ipsa segmenta. Quod à Vieta, effectionum canonicarum propositione decimatertia, alijs verbis enunciatur. Data media trium continuè proportionalium & aggregato extremarum, inuenire extremas. Consuli etiam potest Campanus ad propositionem decimam tertiam libri decimi.

Analysis III. inter planorum comparationem subsistens.

VT G ad D, ita fuerunt plana æqualia quadrato maioris lateris nempe B quadratum, quadrans C quadrati, A quadratum & rectangulum ex C, in A, ad plana æqualia quadrato minoris lateris, nempe ad B quadratum, quadrantem C quadrati, & A quadratum, dempto rectangulo ex C, in A. Sit H linea, excessus quo G linea superat D lineam. Plana autem quæ constituunt quartum analogiæ terminum à planis tertium terminum constituentibus auferantur; & supererit rectangulum ex dupla C, in A. Per diuisionem igitur rationis, vt H, linea ad D, lineam: ita est rectangulum ex dupla C in A, ad quadratum minoris lateris. Fiat vt H ad D, ita dupla C ad aliam putà L, & rectangulum ex dupla C, in A, ad quadratum minoris lateris, rationem habebit quam dupla C ad L; Verum enim-verò habet quoque rectangulum ex dupla C in A, ad rectangulum ex L in A, eamdem rationem quam dupla C, ad L, ex 1. p. l. 6. Quare æquale est rectangulum ex L in A, quadrato minoris lateris siue planis illud quadratum constituentibus nempe B quadrato, quadranti C quadrati, & A quadrato, dempto rectangulo ex C, linea in A lineam. Addatur vtrique æquationis parti rectangulum ex C in A, & adimatur A quadratum. Alia nascetur æqualitas inter rectangulum ex C plùs L, in A, dempto A quadrato, & inter B quadratum auctum quadrante C quadrati. Contrahantur B quadratum & quadrans, C quadrati in vnum M quadratum, quod æquabitur rectangulo ex L, plùs C, in A, dempto A quadrato siue rectangulo ex A in L continuatam C linea & deminutam eadem A. Eritque linea L plùs C, extremarum summa inter quas, medium continuæ proportionis locum tenet M linea. Et vt in altera Analysi, minor extrema est A quia superatur à media quæ est M.

CAPVT IIII.

Aliæ item tres eiuſdem problematis Analyſes vna ex Petro Nonio Algebrica, & ei reſpondentes, duæ Geometricæ, cum additamentis quibuſdam.

ANALYSIS PRIMA.

PERPENDICVLVM æſtimetur numero quinque Baſis numero viginti, & maius latus ad minus, rationem habeat quam latus ſurdi quadrati, quinque, ad vnitatem. Statuo baſis à perpendiculo ſectæ minus ſegmentum eſſe vnam Radicem. Itaque maius ſegmentum valebit viginti, dempta vna Radice. Quadratum è minori ſegmento cùm perpendiculi quadrato, euadit quadratum aliquod auctum numero viginti quinque, & æquatur quadrato minoris lateris. Quadratum autem è maiori ſegmento iunctum eiuſdem perpendiculi quadrato æquatur quadrato maioris lateris, efficiturque quadratum aliquod auctum numero quadringentornm viginti quinque, deminutum quadraginta Radicibus. Et quia maius quadratum ad minus, duplicatam habet laterum rationem erit maior ſumma ad minorem, quemadmodum quinque ad vnum. Neque ex primi termini in quartum ductu; mutatur ſumma: intelligitur tamen eſſe æqualis ei quæ fit ex ſecundi termini ductu in tertium; quinque videlicet quadratis, plus numero centum viginti quinque. Si æqualibus æqualia fuerint addita & adempta ex artis præceptis, quatuor quadrata plus quadraginta radicibus æquabuntur tandem abſolûto numero trecentorum Aut facta vtriuſque partis per numerum quadratorum diuiſione; Quadratum aliquod auctum decem radicibus, æquabitur numero abſoluto ſeptuaginta quinque. Valor radicis ſiue minoris ſegmenti deprehendetur eſſe quinque. Maioris ſegmenti valor, qnindecim. Et maioris lateris quadratum, ducentorum quinquaginta, ad minoris lateris quadratum, quinquaginta, rationem habet quam quinque ad vnum.

Analysis altera quæ ad solidorum comparationem ascendit.

PERPENDICVLVM datum B, basis data C, & ratio maioris lateris, ad minus vt lineæ F ad lineam D. Si statuerimus basis à perpendiculo sectæ minus segmentum esse A lineam; pronunciandum erit maius segmentum esse lineam C deminutam A, linea. Minoris segmenti A quadratum, iunctum perpendiculi B quadrato, efficiet summam æqualem quadrato minoris lateris. Sed maioris segmenti quadratum iunctum perpendiculi quadrato conflabit summam æqualem quadrato maioris lateris, hanc videlicet, B quadratum, C, quadratum, & A quadratum, dempto rectangulo ex dupla C in A. Et quia quadrata duplicatam habent inter se laterum rationem: ratio maioris quadrati siue ei æqualis summæ ad quadratum minoris lateris, siue ad planorum summam ei æqualem, inueniatur eadem quæ est lineæ G ad D lineam. Huiusque analogiæ quartus terminus in primũ ductus tantumdem efficiet, ac tertius ductus in secundum. Solida nimirum ex D linea in B quadratum, ex eadem D, in C quadratum, nec non ex eadem in A quadratum, dempto solido, ex eademmet D, in rectangulum ex dupla C in A; æquabuntur solidis ex G linea in B quadratum & ex eadem G in A quadratum. Vtrique æquationis parti addatur solidum ex D in duplam C in A: Solidum verò ex D in A quadratum vtrinque dematur. Et quidem ademptum solido ex G in A quadratum quod est in posteriori parte, relinquat solidum ex H, in A quadratum: æqualitas supererit inter D, in B quadratum iunctum C quadrato in lineam D: & inter H, in A quadratum iunctum B quadrato in lineam G/ A auferatur prætereà vtrimque G, in B quadratum & fiat reliquorum solidorum in vtraque æquationis parte adstructio ad lineam H. Omnino à solidis prioris partis B quadrato & C quadrato in eamdem altitudinem D; ablatum, G in B quadratum relinquet solidum quoddam ex H in L quadratum. In posteriori autem parte, solidi ex D in C in A, facta astructione ad lineam H, existet solidum ex H, in M, in A, quod cum eiusdem partis reliquo solido, ex H in A quadratum, æquabitur prioris partis solido ex H in L quadratum. Cúmque æqualium solidorum æquales sint altitudines, versabitur & æqualitas inter bases, L scilicet quadratum æquabitur A quadrato &

rectangulo

/ + D in C in A

ctangulo ex A in M, siue rectangulo ex A in ipsammet A continuatam linea M. Eritque vt A ad L, ita L, ad A continuatã linea M: & ex data L, trium continuè proportionalium media, & differentia extremarum M, etiam data, inuenientur extremæ, quarum minor erit A quæsita. Constituetur autem linea L, cum dimidia differentia M, ad angulum rectum, & altero eiusdem dimidiæ M extremo, quod videlicet lineæ L, commune non est, tanquam centro, & interuallo rectæ lineæ, cuius quadratum æquale est dimidiæ M, & lineæ L, quadratis, describetur circulus, ad cuius circumferentiam producetur vtrimque dimidia M, & in circuli dimetiente, media proportionalis L, distinguet extremas. Constat inter peritos artis, eam æquationis formam qua ignotum quadratũ plùs vnitate aut numero in radicem ductis, æquatur numero absoluto; respondere in Geometria, magnitudinibus ita, vt numerus absolutus habeatur pro quadrato è media trium linearum continuè proportionalium: vnitas siue numerus in radicem ductus, censeatur tamquam rectangulum sub differentia extremarum data, & latere quadrati ignoti siue minore extrema: quod rectangulum cum eodem quadrato ignoto, æquatur quadrato mediæ datæ. Præter Nonij & Clauij locos, capite quod proximè antecessit, indicatos, legendæ sunt nona & duodecima propositio, Effectionum Canonicarum apud Vietam.

Analysis tertia quæ planorum fines non egreditur.

VT G linea ad D lineam; ita summa planorum æqualis quadrato maioris lateris, nempe B quadratum, C quadratum, & A quadratum, dempto rectangulo ex dupla C, in A, ad summam planorum æqualem quadrato minoris lateris, nempe ad B quadratum, & A quadratum. Sit H linea excessus quo G linea superat D lineam. Et auferantur plana, quæ analogiæ quartum terminum constituunt, ab ijs quæ tertium componunt, vt relinquatur C quadratum dempto rectangulo ex dupla C in A, excessus videlicet quo minoris lateris quadratum superatur abs quadrato maioris. Per diuisionem igitur rationis vt H linea ad D, lineam, ita est C quadratum, siue rectangulũ ex dupla C, in dimidiam C, dempto rectangulo ex dupla C in A ad quadratũ minoris lateris. Fiat vt H, ad D, ita dupla C ad aliam putà L. Et rectangulum ex dupla C, in dimidiam C, dempto rectangulo ex dupla C in A, siue rectangulum ex dupla C, in dimidiam C, demi-

nutam A, linea, ad quadratum minoris lateris, rationem habebit, quam dupla C ad L. Verumenim-verò habet quoque rectangulum, ex dupla C, in dimidiam C deminutam A, linea, ad rectangulum ex L in dimidiam C, deminutam A linea, eãdem rationem quam dupla C ad L, Rectangulũ igitur ex L, in dimidiam C deminutam A, linea, æquale est quadrato minoris lateris, id est, rectangulum ex L in dimidiam C, dempto rectangulo ex L, in A, æquatur B quadrato & A quadrato. Vtrique æquationis parti addatur rectangulum ex L; in A; dematur verò B quadratum; supererit æqualitas inter rectangulum ex L, in dimidiam C, dempto B quadrato, & inter A quadratum iunctum rectangulo ex L, in A. Sit M quadratum quod relinquitur è rectangulo dimidiæ C in L, post ablatum B quadratum. Eritque M quadratum æquale A, quadrato & rectangulo ex L in A, quodquidem A quadratum, cum adiuncto rectangulo, nihil aliud est quam rectangulum ex A in A continuatam linea L, ac propterea, vt est A ad M, ita M ad A continuatam linea L. Et ex data M trium proportionalium media, & differentia extremarum quæ est L, etiam data, inuenientur extremæ, quarum minor est A, quæsita.

Additamenta quædam ad methodum nostram pertinentia.

IN tertia quaque Analysi tum huius, tum ante hoc proximi capitis, ad effugiendam solidorum comparationem, vsi sumus planorum subtractione, & rationis diuisione: quia vtraque pars eorum quæ data ratione comparabantur planorum, continebat quadratum ignotum, nota additionis siue aduerbio (plùs) notatum. Idem operandi & argumentandi modus vsurparetur, si vtraque comparationis pars ignotum quadratum nota deminutionis siue aduerbio; (Minùs) affectum contineret. Occurrent tamen multa problemata in quibus vna comparationis pars ignotum quadratum sub nota additionis; Altera pars idem quadratũm sub nota deminutionis continebit. Qua de causa vtraque pars eorum quæ data ratione comparabuntur, planorum, ad vnam summam reuocabitur additione, & in terminis rationis datæ idem fiet. Summa verò planorum cum alterutra eorum parte: & summa terminorum quibus ratio data est, cum alterutro termino comparabitur. Eijcitur enim planis

vtriuſque partis in vnam ſummam additis, ſeditioſum illud quadratum; & reliqua eiuſdem ſummæ plana cognita ad eam lineam cognitam ſimplicem aut compoſitam adſtruũtur, quæ ducitur in latus ipſius ignoti quadrati. Semperque poſt tres lineas, quarum vna eſt, ſumma terminorum rationis datæ, altera rationis datæ linea ſiue terminus alteruter, & tertia, ea ipſa linea ad quam adſtructa fuerint plana omnia cognita, inuenitur quarta proportionalis, ad quã intelligũtur adſtrui plana alterutrius partis prout opus exiget. Interdum accidit quadratum ignotum in vna ſæpius quam in altera comparationis parte repeti: cui difficultati obuiam itur, ſumptis antecedentium vel conſequentium Analogiæ terminorum æque multiplicibus aut æque multeſimis quemadmodum exemplis meliùs quam præceptis Inſtitutiones noſtræ, ſi Deo viſum fuerit, aperient. Quando altera comparationis pars ſtatim ab initio ſub vna cognita ſeſe offert altitudine, aut quando vtraque pars ſub eadem ignota reperitur altitudine, cuiuſmodi problemata ad duas primas claſſes referemus, non ita magno negotio ſe expediet, quiſquis analyſes ſuperius allatas diligentius expenderit. Problemata enim tertiæ claſſis in quibus cenſendum eſt, illud quod hactenus explicuimus, complectuntur ferè quidquid eſt artificij in duabus primis claſſibus. Quartæ porrò claſſi ea tribuimus problemata in quibus ſecutura videtur comparatio inter ſolida; propter cognitorum planorum ad ignotas lineas, aut propter ignotorum planorum ad cognitas lineas aſtructionem. Quo de genere hæc ſunt. B quadratũ adſtructum ad A ſe habet ad ipſam A, quemadmodũ C ad D: fiat quemadmodum B ad F: & inter extremas datas B & F, media continuæ proportionis erit A quæſita. Item B planum aſtructum ad A, æquatur rectangulo D in A quod adſtructum eſt ad C: fiat B plani ad lineam D, adſtructio, & oriatur latitudo F. Erit F, ad A vt A, ad C. Tertiò rectangulum ex C in B, deminutum rectangulo ex C, in A, & adſtructum ad B; æquatur rectangulo ex A, in B quod deminutum ſit, A quadrato, & adſtructum ad C: ergò rectangulum ex C in B, deminutum rectangulo ex C, in A; eſt ad rectangulum ex A, in B, deminutum A, quadrato vt B ad C; hoc eſt, ipſamet C, ad aliam D, æqualem A, quæſitæ.

CAPVT V.

Demonstratis tribus lemmatis primum è Varijs Ghetaldi problema, quod idem è duobus Regiomontani posterius est, ipsius Ghetaldi verbis construitur & demonstratur: succedit animaduersio nostra, & præcipuum lemma, cuius beneficio structura problematis confirmatur.

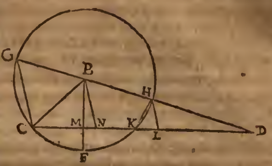
ANte quam vir doctissimus Marinus Ghetaldus ad problematis quod à Regiomontano, propositione vigesima tertia, libri secundi de triangulis propositum est, explicationem accederet; duo lemmata sibi demonstranda censuit: quorum vno docet differentiam segmentorum basis à perpendiculo sectæ, maiorem esse differentia laterum trianguli: Quia tamen huius lemmatis veritas ex alio lemmate quod à Regiomontano vsurpatur, satis elucescit: illud ante omnia proponemus & demonstrabimus.

REGIOMONTANI LEMMA.

Vt differentia laterum trianguli ad differentiam segmentorum basis à perpendiculo factorum, ita est basis ad summam laterum eiusdem trianguli.

EXponatur triangulum cuius basis C D, minus latus B C, maius B D, & perpendiculum, B M, in basim cadens, distinguat segmenta, C M, quidem minus; M D, autem maius: Quapropter ex M D, potest resecari linea M K, ipsi C M, æqualis: Quod si à vertice trianguli duceretur B K, ea per quartam primi, rectæ B C, æqualis comprobaretur. Itaque circulus vertice B, tanquam centro & interuallo BC, descriptus, transit per punctum K, & à maiori latere BD, aufert lineam BH, ipsi B C, æqualem, cui etiam ex definitione circuli æqualis est BG, ad circumferentiæ pūctum G, ipsi H, oppositum ducta. Itaque linea G B D, est summa laterum CB, & BD: li-

nea autem H D, eorumdem differentia. Et maius basis segmentum M D, longitudine siue differentia K D, differt à minori segmento C M, siue M K. Cæterũ ex corollario primo trigesimæ sextæ prop. lib. 3. rectangulum sub H D, & G D, æquatur rectangulo sub K D, & C D, & per 14. p. l. 6. D H, differentia laterum trianguli est ad DK, differentiam segmentorum basis à perpendiculo factorum: vt



CD, basis ad GD, summam laterum; quod voluit Regiomontanus: cumq; C D, basis minor sit lateribus C B, & B D, in vnam summam GD, additis; erit quoque differentia laterum, ipsa nempe DH, minor quàm DK, differentia segmentorum basis à perpendiculo sectæ, quod voluit Ghetaldus. Possunt autem ex corollar. quartæ prop. lib. 5. huius analogiæ termini, euerso situ ita collocari. Differentia segmentorum basis à perpendiculo sectæ, est ad differentiam laterum trianguli quemadmodum summa laterum ad basim eiusdem trianguli. Et hac collocatione postea, bis vtemur.

LEMMA NOSTRVM.

Differentia segmentorum basis à perpendiculo factorum, differentia laterum trianguli & differentia segmentorum basis sectæ pro ratione eorumdem laterum, sunt continuè proportionales.

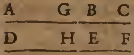
HOc vsurpabimus capite vltimo, demonstrabimus iam. In eadem figura CBD, angulus ad verticem trianguli secetur in semisses à recta B N, secante basim C D, puncto N: & rectæ B N, æquidistet HL. Erit per secundam prop. sexti BH, ad H D, quemadmodum N L, ad L D; & componendo B D, ad H D, vt N D. ad L D: per tertiam autem prop. lib. sexti BD, est ad B C, siue BH, vt ND, ad NC,

& per coroll. 19. p. l. 5. BD, est ad DH, vt ND, ad excessum, siue differentiam qua differt ab NC. Et quia fuit BD, ad DH, vt ND, ad LD, constat ND, ad LD, eamdem habere rationem quam ND, ad excessum, siue differentiam qua differt ab N C: ac propterea L D, erit differentia segmentorum basis pro ratione laterum trianguli B C D, sectæ. Ducantur rectæ G C, & H K: eritque quadrilaterum G, H, C, K, inscriptum circulo, & anguli aduersi HKC, & HGC, æquales duobus rectis. Sunt verò HKC, & HKD, etiam duobus rectis æquales. Itaque HKD, angulus, æqualis est angulo HGC, siue per vigesimam, tertij & per fabricam, angulo HBN, siue etiam propter æquidistantes, angulo DHL. Et triangulum HDK, commu- nem habens ad D, angulum cum triangulo H D L, & æqualem HKD, angulo DHL, reliquum DHK, reliquo DLH, æqualem habeat, necesse est. In triangulis igitur, æquangulis & similibus, vt KD, ad DH, ita DH, ad DL: hoc est vt differentia segmentorum basis à perpendiculo factorum, ad differentiam laterum trianguli BCD: ita differentia eorumdem laterum, ad differentiam segmentorum basis sectę pro ratione laterum, quod demonstrandum fuit.

Ghetaldi Lemma è duobus alterum.

Si duo rectangula fuerint æqualia, fuerint autem & quadrata laterum primi, æqualia quadratis laterum secundi, latera primi lateribus secundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

SIt rectangulum A B C, æquale rectangulo D E F, & quadrata AB, B C, simul sumpta æqualia quadratis D E, E F, simul sumptis. Dico rectas, A B, BC, rectis D E, E F, æquales esse., maiorem videlicet maiori, minorem minori. Quoniam enim quadrata AB, BC, æqualia sunt quadratis DE, EF, & rectangulum A B C, æquale rectangulo D E F, quadrata AB, BC, vnà cum rectangulo A B C, æqualia erunt quadratis, D E, E F, Vnà cum rectangulo DEF. duplicentur rectangula ABC, DEF, quadrata igitur A B, B C, vna cum duplo rectanguli ABC, hoc est per 4. p. l. 2. quadratum AC, æquale erit quadratis DE, EF, vnà cum



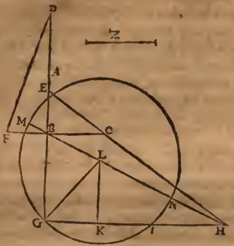
duplo rectangulo DEF, hoc est per eamdem 4.p.l.2. quadrato DF. quare & recta AC, æqualis erit recta DF. Iam secentur ipsæ AC, DF, bifariam in G, & H, erunt igitur AG, DH, æquales, & æqualia quoque earum quadrata: sed quadratum AG, per 5.p.l.2. æquale est rectangulo ABC, vnà cum quadrato GB, & quadratum DH, per eamdem 5. p.l.2. æquale rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE. Rectangulum igitur ABC, vnà cum quadrato GB, æquale erit rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE: auferantur æqualia rectangula ABC, DEF, reliquum igitur quadratum GB, reliquo quadrato HE, æquale erit, vnde & recta GB, æqualis rectæ H, quare per additionem & subductionem æqualium æqualibus, erit AB, æqualis DE, & reliqua BC, æqualis reliquæ EF, quod erat ostendendum.

PROBLEMA IPSVM.

Data perpendiculari, differentia laterum trianguli, et differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Sit data perpendicularis trianguli AB, differentia laterum BC, & differentia segmentorum basis Z, oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad rectos angulos, AB, BC, ipsaque BA, duplicetur in D, & in ea ponatur CE, æqualis Z: est autem ipsa Z, ex antecedente quod primo loco præmissum est lemmate, maior quam BC, deinde producatur CB in F vt sit BF, æqualis BE, & iungatur FD: & producatur quoque AB in G vt sit EG, æqualis DF: ipsi autem BC, parallela agatur GH, secans EC, continuatam in H: & in ea sumatur HI, æqualis EC: reliqua verò IG secetur bifariam & ad rectos angulos in K, *à recta linea* KL *æquali ipsi BA: & iungantur GL, LH: trianguli igitur* LGH *perpendicularis* LK, *æqualis est AB ex constructione: & IH differentia segmentorum* GK, KH, *æqualis EC, hoc est ipsi Z. Superest igitur vt differentia laterum, LG, LH. æquetur ipsi BC. Id autem ita fiet manifestum. Centro L, interuallo LG, describatur circulus secans rectam HL, continuatam, in punctis M, N. Differentia igitur laterum LG, LH, erit NH, & circulus MGN, transibit per I; ex 3.p.l.3. Sunt enim* GK, KI, *æquales: &* LK *perpendicularis est ipsi GI. Quoniam igitur MH*

secta est in N: quadrata M H, H N per 7.p.l.2. æqualia erunt duplo rectanguli M H N, vna cum quadrato M N, hoc est vna cum quadruplo quadrati L G: diameter enim M N dupla est L G semidiametri, sed duplum rectanguli M H N æquale est duplo rectanguli G H I: & quadruplum quadrati L G, æquale quadruplo quadratorum G K, L K, *hoc est quadratis G I, D B: sunt enim G I, D B, ipsarum* GK, LK *duplæ: ergo quadrata M H, H N, æqualia erunt quadratis G I, D B vnà cum duplo rectanguli G H I; Sed quadratum G I, vnà cum duplo rectanguli G H I per septimam secundi, æquale est quadratis G H, I H: hoc est G H, E C: quadrata igitur M H, H N, quadratis G H, E C, D B, æqualia erunt: sed quadrato E C æqualia sunt quadrata E B, B C, hoc est F B, B C: ergo quadratis M H, N H, quadrata G H,* D B, B C, F B, *æqualia erunt: quadratis autem* D B F B, *æquatur quadratum D F, hoc est E G: ergo quadrata M H, N H æqualia erunt quadratis G H,* B C, *E G. Sed quadratis E G, G H, æquatur quadratum* E H; *ergo quadratis* M H, N H, *æqualia erunt quadrata* E H, B C. *Et quoniam ratione parallelarum* B C, G H, *est vt* E H, *ad* G H: *ita E C, id est I* H *ad* B C: *rectangulum* E H, B C *sub extremis æquale erit rectangulo* G H *I, sub medijs, hoc est rectangulo* M H N. *Sed & quadrata* E H, B C, *ostensa sunt æqualia quadratis* M H, N H: *Ergo ex antecedente quod secundo loco præmissum est, lemmate, recta* M H, *ipsi* E H, *erit æqualis, &* N H, *ipsi* B C, *quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum L G* H, *in quo perpendicularis* L K *æqualis est* A B: *ipsa verò* N H *differentia, laterum, æqualis* B C, *ac denique* I H *differentia segmentorum basis, æqualis Z, quod erat faciendum.* Hactenus Ghetaldi verbis constructum & demonstratum problema.

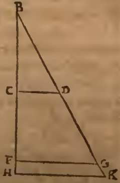


SIMPLEX

SIMPLEX ANIMADVERSIO.

Trianguli cuiuſuis rectanguli maximum latus non poteſt ſemper à baſi trianguli ſimilis & maioris auferri.

ESTO B C D, triangulum rectangulum: & fiat vt C D, baſis ad maximum latus D B: ita B C perpendiculum ad B C H, & per H agatur H K, baſi C D æquidiſtans cui B D, continuatum occurret in K, propter angulos B H K, & H B K minores duobus rectis. Eritque triangulum B H K, ſimile triangulo B C D, & vt B C, ad C D, ita B C H, ad H K: & viciſſim B C ad B C H, vt C D ad H K: Sed vt B C ad B C H, ita quoque fuit C D ad D B. Itaque C D eſt ad D B, vt C D, ad H K, & à linea D B, æqualis eſt ipſi H K: Inter C & H ſumatur quoduis punctum F, per quod agatur F G æquidiſtans baſi C D, & ſecans lineam B K puncto G. Conſtitutum erit tertium triangulum ſimile reliquis duobus, & minus triangulo B H K, maius triangulo B C D: atque adeo baſis eius F G minor baſi H K ſiue latere B D: nec poteſt



latus B D auferri à baſi F G. Quæ omnia è primis Geometriæ elementis, ita ſunt perſpicua; vt plura in ijs demonſtrandis verba perdenda non ſint. Mirum igitur videri poſſit cur Ghetaldus continuato ſui dragrammatis perpendiculo E B, in G: & acta per G, recta G H quæ æquidiſtat baſi B C & cui maximum trianguli ſuperioris latus occurrit in H: non demonſtrauerit lineam G H, tantam eſſe vt ab ea poſſit auferri maximum latus trianguli rectanguli E B C. Quod ſi feciſſet, lemmate illo altero quo vſus eſt, non fuiſſet opus. Atque haud ſcio, an Iacobus Chriſtmannus in libello cui ex Gordij nodo nomen fecit, idipſum ſignificare voluerit. *Examinaui* (inquit) *primum diagramma* (è Variis Ghetaldi) *ac eius conſtructionem vacillare deprehendi.* Cùm autem Chriſtmannus nihil aliud addat, ex

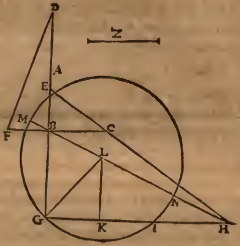
quo deprehendere liceat, quid ipse in hoc Ghetaldi problemate desideret: Nec Ghetaldus post illam animaduersionem ante quinquennium à Christmanno factam, problema (quod sciam) restituerit, conabor virum præstantissimum, alijs fortasse grauioribus occupatum, hac cura leuare. Quemobrem ita propono & demonstro.

LEMMA PRÆCIPVVM.

Quadratum è summa laterum superat quadratum è basi trianguli, quadrato dupli perpendiculi & eo insuper quadrato, quo superatur quadratum ex differentia laterum, abs quadrato è differentia segmentorum basis à perpendiculo sectæ.

REpetatur descripta ab ipso Ghetaldo figura, in qua triangulum G L H, & interuallo minoris lateris G L, descriptus circulus, abscindit à basi G H, differentiam segmentorum quæ in ipsa basi distinguit perpendiculum L K, secans rectam G I, in semisses G K, K I, & extra circulum relinquens rectam I H qua differt maius basis segmentum à minori: Aufert verò etiam circulus à maiori latere L H lineam L N æqualem minori lateri, exclusa N H laterum differentia: At ipsa laterum summa est M L H, quæ cum sit maior basi G H, etiam eius quadratum maius erit basis quadrato. Sit lineæ G E quadratum vna cum basis quadrato, æquale quadrato è summa laterum Et constitutis G E, G H ad rectum angulum: linea E H recto angulo subtensa æqualis erit summæ laterum. Ac propterea ex E H, poterit resecari E C que sit rectæ I H, differentiæ nempe segmentorum basis à perpendiculo sectæ æqualis. Per punctum C, agatur basi G H, æquidistans C B, & occurrens rectæ G E, in B. Itaque constituta erunt duo triangula similia E C B, & E H G: in quibus vt E C siue I H, ad C B: ita E H siue M L H, ad G H: sed ex ijs quæ diximus primo lemmate: I H siue E C est ad N H; quemadmodum M L H siue E H ad G H. Quare I H siue E C ad rectam C B habet eamdem rationem quam ad N H, siue ad differentiam laterum G L & H L: est que C B æqualis differentiæ eorumdem laterum. Cùm autem ex eodem primo lemmate rectangulum sub M H, & N H, æquale sit rectangulo sub G H & I H: etiam æqualium dupla inter

se se erunt æqualia. Atque adeo si duplo rectangulo sub MH, summa videlicet laterum trianguli G L H & sub N H; differentia eorũdem laterum: additum fuerit quadratũ lineæ M N: duplo autem rectangulo sub G H basi & sub I H, differentia segmentorum eiusdem basis à perpendiculo sectę, additum fuerit quadratum dupli perpendiculi L K & rectæ G I quadratum: summę ex vtraque additione ortę inter sese æquales erunt: nam æqualia quadrata ad æqualium rectangulorum dupla, fuerint hoc modo addita: si quidem rectæ M N dimetientis quadratum æquale est quadruplo radij G L, quadrato siue ex quadragesima septima primi, & decima quinta, quinti, quadruplis



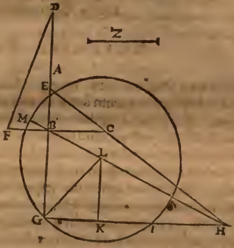
perpendiculi L K & segmenti K G, quadratis: siue etiam ex ijs que demonstrantur scholio ad quartam secundi, quadratis duplæ L K, & rectæ G I. Duplum porrò sub M H rectangulum vna cum quadrato M N æquatur per septimam secundi quadratis ex M H, & N H. Ergo eadem quadrata ex M H & N H æquabuntur quoque duplo rectangulo sub G H, & I H, vnà cum dupli perpendiculi L K & rectæ H I quadratis, Ex eadem verò secundi septima duplum rectaugulum sub G H. & I H vnà cum rectæ G I quadrato æquatur quadratis ex G H, & I H: cùmque rectæ I H siue E C quadratum æquale sit duobus, rectæ E B, & rectæ C B, quadratis: tria hæc quadrata rectarum G H, E B & C B æqualia erunt duplo rectangulo sub G H, & I H vnà cum rectæ H I quadrato. Et si accedat dupli L K, perpendiculi quadratum necesse est hæc quatuor quadrata ex G H basi trianguli L G H, ex E B ex C B nec non è duplo L K perpendiculo, æquari quadratis ex M H (summa videlicet laterum G L L H) nec non ex N H differentia eorumdem laterum. Et quia qua-

dratum ex C B æquale est quadrato ex N H: si vtrimque fuerit vtrumque quadratum ablatum: Supererit quadratum ex M H summa laterum trianguli æquale quadrato basis G H, atque insuper quadrato dupli L K perpendiculi & rectę E B quadrato: quoquidem rectę E B quadrato, superatur quadratum ex C B, siue N H differentia laterum abs quadrato ex E C, siue I H differentia segmentorum basis à perpendiculo sectę. Quadratum igitur è summa laterum superat quadratum è basi trianguli, quadrato &c. quod demonstrandum fuit.

Constructio problematis adprobata.

CONSTITVTIS ad angulum rectum, B C differentia laterum data, & recta E B, cuius quadrato differentia segmentorum data superat quadratum ex ipsa laterum differentia: Connectatur E C maximum trianguli rectanguli latus quod ex quadragesima septima, primi satis intelligitur æquari differentię segmentorum in quæ secatur basis à perpendiculo. In B E porrò nullo præstituto fine continuata, sumatur B D æqualis duplo dati perpendiculi. Et C B, in F continuetur, vt sint E B, & F B, æquales. Rectas B D & B F, connectat recta F D quæ ideo dupli perpendiculi dati quadrato, & ei insuper quadrato quo differentiæ segmentorũ datæ quadratum superat quadratum differentiæ laterũ etiam datæ, aliud quadratum ex se procreabit æquale. Immò si recta E B continuetur in G; quadratum rectæ E G quæ sit rectæ F D, æqualis; æquabitur excessui quo superatur quadratum è basi, abs quadrato è summa laterum trianguli quæsiti. Nam ex proximè demonstrato lemmate quadrata rectarum B D, & E B, siue B F, constituunt hunc excessum; cui è 47. p. l. 1. æquatur quadratũ rectæ F D, siue æqualis E G. Per punctũ G, agatur recta G H, æquidistans rectæ B C, cui maximum superioris trianguli latus E C continuatũ occurret, in aliquo puncto H, propter angulos E B C, siue E G H; & B E C, siue G E H, minores duobus rectis. Cúmque sit vt differentia segmentorum quę in basi distinguuntur à perpendiculo, ad differentiam laterum trianguli: ita summa laterum ad basim; erunt per vigesimam secundam sexti, etiam quadrata earumdem linearum proportionalia: Et per diuisionem rationis vt quadratum rectę E B, quo quidem quadrato, quadratum rectæ E C, siue differentiæ segmentorum datæ, superat quadratum rectę

B C, siue differentiæ laterum trianguli etiam datæ, ad ipsummet rectæ B C quadratum: ita erit E G quadratum quo summa laterum eiusdem quæsiti trianguli superat quadratum ex basi, ad ipsummet eiusdem basis quadratum. Et per posteriorem vigesimæ secundæ prop. lib. sexti partem: vt recta E B, ad rectam B C: ita est recta E G, ad basim trianguli quæsiti. Verumenim-vero propter similitudinem triangulorum, vt recta E B, ad rectam B C, ita quoque est recta E G, ad rectam G H. Ergò recta E G, ad basim trianguli quęsiti, eamdem habet rationem quam ad G H: & basis trianguli quæsiti, æqualis est rectæ G H. Quare ex H G, potest rescindi H I, quæ sit æqualis differentiæ segmentorum datæ: Et reliqua I G, in



semisses, puncto K secabitur, differetque segmentum K I H, à segmento G K, differentia data I H. Quod si è puncto K fuerit excitatum perpendiculum K L, æquale dato, & connectantur rectæ G L H L: nemo non videt constructum esse triangulum quod quærebatur. Nam G H fuit æqualis inuenta basi quæsitę, cuius segmenta G K, & K H, differunt etiam differentia data I H: & maioris lateris L H, quadratum æquatur maioris segmenti quod inuentum est, & perpendiculi quod datum est, quadratis. Minoris autem lateris, L G, quadratum æquatur eiusdem perpendiculi, L K, dati, & segmenti, G K, inuenti quadratis.

Capvt VI.

Eiuſdem problematis tres analyſes: vna ex Regiomontano mutatis tamen numeris Algebrica. Altera parametrica ei reſpondens quemadmodum & tertia Geometrica.

Analysis Prima.

Ioannes Regiomontanus perpendiculum æſtimat denario, differentiam ſegmentorum baſis ab eodem perpendiculo factorum, numerat duodenario, & differentiam laterum trianguli, vult eſſe ternarium. His poſitis baſim ignotam fingit eſſe vnam rem ſiue vt alij loquuntur, radicem, & analyſeos filum quadamtenus explicat: quod tamen ſi quis totum meo exemplo euoluerit, deprehendet tandem quadratum ignotum æquari numero cognito triginta quinque cum duobus trientibus, qui numerus cùm ſit minor quam triginta ſex; eius quoque vt ſurdi quadrati latus minus erit ſenario: & baſis quæſitæ valor huic ſurdi quadrati lateri æqualis, ſuperabitur à differentia ſegmentorum ſiue à duodenario quod eſt abſurdum. Verumtamen Regiomontani argumentatio legitima eſt, & quidquid erroris obrepſit; à numeris quos fortuito arripuit, profectum eſt. Æſtimetur ergo perpendiculum duodenario, & differentia ſegmentorum ab eodem factorum, quaternario: differentia verò laterum binario. Statuaturque baſis ignota eſſe vna radix & ſumma laterum duæ radices: nam ratio baſis ad ſummam laterum ex Regiomontani lemmate quod demonſtrauimus capite ante hoc proximo, eſt eadem quæ differentiæ laterum, ſiue binarij, ad differentiam ſegmentorum ſiue ad quaternariũ: hoc eſt, vnius radicis ad duas radices. Minus baſis ſegmentum erit, dimidium vnius radicis, dempto binario. Sed minus latus trianguli erit, vna radix, dempta vnitate. Ducatur hic valor minoris lateris in ſeipſum: conflabitur quadratum aliquod deminutum duabus radicibus, auctum vnitate. Minoris autem ſegmenti valor in ſeipſum ductus efficiet quadrantem vnius quadrati, auctum quaternario; deminutum duabus radicibus: cui ſummæ ſi addamus centum quadraginta quattuor, numerum videlicet qua-

dratum perpendiculi, euadet tota ſumma æqualis quadrato minoris lateris: Et quadrans vnius quadrati auctus numero centum quadraginta octo; deminutus duabus radicibus, æquabitur vni quadrato nec-non vnitati, demptis duabus radicibus. Suppleantur in vtraque æquationis parte duæ radices: & auferatur vtrimque quadrans vnius quadrati atque etiam vnitas: Supererunt tres quadrantes quadrati æquales numero abſoluto centum quadraginta ſeptem. Et ijſdem centum quadraginta ſeptem per tres quadrantes diuiſis proueniet numerus quadratus centum nonaginta ſex: cuius latus valet quatuordecim. Et idem eſt baſis antea ignotæ valor. Itaque minus ſegmentum valebit quinque. Maius verò nouem, quorum ſegmentorum differentia eſt quattuor. Ad viginti quinque numerum minoris ſegmenti quadratum ſi addamus centum quadraginta quattuor numerum perpendiculi quadratum, conflabimus centum ſexaginta nouem, cuius numeri quadrati latus valet tredecim. Et idem eſt minus trianguli latus. Ad maioris ſegmenti quadratum nempe ad octoginta & vnum, ſi addamus perpendiculi quadratum ſiue centum quadraginta quattuor, prouenient ducenta viginti quinque, cuius numeri quadrati latus valet quindecim. Et idem eſt maius trianguli latus quod binario differt à minori latere.

Analyſis ſecunda quæ ad planoplana aſcendit.

HVIVSMODI Analyſes voco parametricas, quia lineæ & plana ſunt parà tes metrices, id eſt ab ipſa metiendi ſcientia. Planoplana autem & quadrato quadrata ſunt parà ten metricen, id eſt præter eiuſdem ſcientiæ naturam. Itaque Zeteticum libri ſecundi nonum & alia plura apud Vietam ſunt parametrica; propterea quod ad planoplanorum comparationem aſcendunt. Cæterùm vt facilius intelligantur quæ paullò poſt allaturus ſum, quamuis Arithmeticorum multiplicatio comprehendat Geometrarum ductum, vt binarij in ternarium; & multiplicationem propriè dictam, vt eiuſdem ternarij non mutata ſpecie triplicationem: diuiſio autem complectatur adſtructionem, vt ſenarij ad binarium, vnde oritur ternarius; & partitionem, vt eiuſdem ſenarij in ſex vnitates, ſiue æquales partes ſectionem: poſſunt nihilo minùs quinquaginta ſex diuiſa per duo, eſſe quattuordecim ducta in quaternarium, & adſtructa ad binarium; ſiue rectangulum ex A in C, adſtructum ad D: & quemadmodum in

numerorum minutijs fieri solet: ita hîc licet scribere A in C, & interposità virgâ quauis seu lineâ, eidem rectangulo subscribere literam C, qua simplex longitudo indicatur. Virga enim interposita supplet adstructionis notam. Eam tamen virgam aliquantulum inflecti velim ne deminutionis nota esse, aut aduerbium (Minùs.) significare videatur. Quando igitur planum vnum aut plura ad lineam aliquam adstrui, & planoplanum vnum aut plura ad aliquod planum quasi adstrui proposuero: commodum fuerit ijs quę adstruuntur, intelligere subscriptas magnitudines ad quas fit adstructio virgâ interpositâ. Deinde additiones subductiones, ductus, æquationum transformationes, & alia omnia perinde atque in numerorum minutijs, exequi. Verbi causa B, in C, adstructum ad D, siue latitudo quæ oritur ex adstructione rectãguli B in C, ad longitudinem D, æquatur lineę C, siue etiam lateri quadrati æqualis B quadrato & A quadrato: quia linea C, siue latus illud nõ offertur sub forma adstructionis, non abs re fuerit latitudini C aut lateri illi intelligere subscriptam notam nullius adstructionis quę poterit esse duplex circulus eodem centro; sed imparibus & breuibus radijs descriptus: & facto decussatim ductu (quo modo efformatur crux Burgundica) rectangulum B, in C, æquabitur rectangulo D, in C: siue D in latus quadrati æqualis B quadrato & A quadrato: non secus atque in numeris si quattuor ducta in quinque & adstructa ad duo æquantur denario; siue etiam lateri quadrati æqualis numeris triginta sex, & sexaginta quattuor: planus numerus ex quaternario in quinarium, æquabitur plano numero ex binario in denarium; siue etiam ex binario in latus quadrati æqualis numeris triginta sex & sexaginta quattuor.

Sit iam perpendiculum trianguli datum, linea B. Differentia segmentorum basis ab eo factorum data sit linea C. Et differentia laterum data sit D linea. Statuatur ignota trianguli basis esse linea A. Et quia vt D linea ad C, lineam: ita est è Regiomontani lemmate, linea A, siue basis ad summam laterum: si rectangulum sub A, linea in C, lineam, adstruatur ad D lineam, orietur latitudo æqualis summæ laterum: quæ ideo breuitatis causa vocari potest rectangulum ex A in C, adstructum ad D. Minus basis segmentum censebitur dimidium A lineæ, deminutum dimidio C lineæ. Sed minus trianguli latus erit rectangulum dimidiæ A in C, adstructum ad D, & deminutum semisse ipsius D: aut reuocatis omnibus ad eamdem quasi nomenclaturam, rectangulum dimidiæ A in C, deminutum

rectangulo

rectangulo dimidiæ D in totam D, & adstructum ad ipsam D, erit minus trianguli latus. Cuius quadratum efficitur quadrans A quadrati in C quadratum, auctus quadrante D quadrati in D quadratum, deminutus duplo planoplani ex A dimidia in C, in dimidiam D, in D, & applicatus ad D quadratum. Ducatur minoris segmenti valor in seipsum, & existet quadrans A quadrati auctus quadrante C quadrati, deminutus rectangulo ex C in dimidiam A. Cui si addatur perpendiculi B quadratum, tota summa æquabitur quadrato minoris lateris, quod sub planoplanis ad quadratum applicatis paullò antè inuentum est. Et facto decussatim ductu, quadrans A quadrati in C quadratum, auctus quadrante D quadrati in D quadratum, & deminutus duplo planoplani ex A dimidia in C in dimidiam D in D, æqualis erit D quadrato in B quadratum, D quadrato in quadrantem A quadrati, D quadrato in quadrantem C quadrati; his tribus planoplanis deminutis eo quod fit ex D quadrato in C, in dimidiam A. Suppleatur in vtraque æquationis parte, duplum planoplani ex A, dimidia in C, in dimidiam D, in D; siue eidem æquale planoplanum ex quadrato D in C, in dimidiam A. Remanebit æqualitas inter quadrantem A, quadrati, in C, quadratum, iunctum quadranti D quadrati in D quadratum: & inter D, quadratum in B quadratum & D quadratum in quadrantem A, quadrati, nec-non D quadratum, in quadrantem C quadrati. Demantur vtrimque duo planoplana D quadratum in quadrantem A quadrati, & quadrans D quadrati, in D quadratum. Cùm in priori æquationis parte, D quadratum in quadrantem A quadrati, adimetur C quadrato in qnadrantem A, quadrati propterea quod C, lineæ maioris, maius est quadratum quàm D lineæ minoris ex lemmate Regiomontani, relinquetur aliquod planoplanum vt F quadratũ in quadrantem A, quadrati. Et ob eamdem causam cùm in posteriori æquationis parte, D quadratum in quadrantem D quadrati, auferetur à D quadrato in quadrantem C quadrati, relinquetur aliquod planoplanum vt D quadratum in G quadratum. Itaque planoplanum priori parti vnicum relinquetur, nempe F quadratum in quadrantem A quadrati æquale duobus reliquis posterioris partis, nempe D quadrato in B quadratum, & D quadrato in G quadratum; quæ duo in vnum possunt contrahi, si B & G quadratis æquale constituatur H quadratum, in quod ducatur D quadratum. Fiat iam F quadratum ad D quadratum, quemadmodum H quadratum ad aliud, nempe L

quadratum: Sub extremis factum æquabitur facto sub medijs: F, videlicet quadratum in L quadratum, æquabitur D quadrato in H quadratum: Sed eidem D quadrato in H quadratum, æquabatur F quadratum in quadrantem A, quadrati: Quare & F quadrato in L quadratum æquabitur, F, quadratum in quadrantem A quadrati. Cúmque eadem magnitudo ducta in duas, nempe F quadratum in L quadratum, & in quadrantem A, quadrati procreet æqualia plano plana, constat L quadratum æquale esse quadranti A, quadrati; & lineam L, dimidiæ A, & duplam L toti A basi prius ignoratæ æquari.

Analysis tertia, planorum finibus contenta.

IN ea quæ proximè antecessit Analysi, Minus triangnli latus censebatur rectangulum dimidiæ A in C, deminutum rectangulo dimidiæ D in D & ad eamdem D adstructum. Fiat rectanguli dimidiæ D in D, siue dimidij D quadrati adstructio ad lineam C, & oriatur latitudo F, quæ minor erit quàm dimidia D, propterea quod linea C maior sit quàm D. Itaque minus trianguli latus erit, rectangulum dimidiæ A in C, deminutũ rectangulo F in C, & adstructum ad D, siue rectangulum ex C in dimidiam A deminutam F, linea; adstructum ad D: Sed idem est latus quadrati æqualis quadratis perpendiculi & minoris segmenti; siue latus quadrati æqualis B quadrato, quadranti A quadrati & quadranti C quadrati, deminutis rectangulo, C in dimidiam A. Quamobrem facto decussatim ductu, rectangulum, ex C in dimidiam A, deminutam F linea, æquabitur rectangulo, ex D, in latus quadrati æqualis quadratis perpendiculi & minoris segmenti. Et per 14. prop. lib. 6. vt C ad D, ita reciprocè latus quadrati æqualis B quadrato, quadranti A quadrati & quadranti C quadrati, deminutis rectangulo ex C, in dimidiam A, se habet ad dimidiam A, deminutam F linea. Et per 22. propos. eiusdem lib. 6. C, quadratum se habet ad D quadratum; vt B quadratum, quadrans A quadrati, & quadrans C quadrati, dempto rectangulo lineę C in dimidiam A, se habent ad quadrantem A quadrati, auctum F quadrato & deminutum rectangulo duplę F in dimidiam A. Quia vero primus analogię terminus maior est secundo, etiam tertius quarto maior erit. Auferantur plana constituentia quartum à planis tertium terminum constituentibus. Et quidem quadrans A quadrati, à quadrante A quadrati ablatus, nihil relin-

quit. Sed rectangulum duplæ F, in dimidiam A, detractum rectangulo C lineæ in dimidiam A, relinquet aliquod rectangulum vt G lineæ in dimidiam A. Dupla enim F, minor est quam D, ac multo magis quàm C, quoniam F minor fuit quàm dimidia D. Hoc autem rectangulum, G lineæ in dimidiam A, notâ deminutionis afficietur non secus ac planum quod detractum est, & planum cui detractum est. Cæterum F quadratum minus est dimidiæ D quadrato, & ablatum à dimidiæ C quadrato, relinquet aliquod planum quod B quadrato iungi & ad lineam G adstrui debet, vt oriatur latitudo H. Atque ita rectangulum lineæ G in H deminutam dimidia A, erit excessus quo tertius analogiæ terminus superat quartum. Cúmque orta sit F, linea ex adstructione dimidij D quadrati ad lineam C, satis constat D quadratum esse æquale rectangulo duplæ F in C, hoc est post duas C, & D, tertiam continuè proportionalem esse duplam F. Et per coroll. prop. 20. lib. 6. C quadratum ad D quadratum, se habet quemadmodum C, ad duplam F. Vt autem C quadratum ad D quadratum: ita fuerunt plana vnde facta est detractio, ad plana detracta. Quare & eadem plana inter se rationem habebunt, quam C, ad duplam F. Et per diuisionem rationis vt G linea, siue excessus quo C linea superat duplam F, ad ipsammet F duplam; ita excessus quo eadem plana vnde facta est detractio superant plana detracta, ad ipsamet plana detracta. Id est vt G ad duplam F, ita rectangulum lineæ G in H, deminutam semisse A lineæ ad quadrantem A quadrati auctum F quadrato, & deminutum rectangulo duplæ F in dimidiam A. Verumenim-vero quam habet rationem linea G ad duplam F, eandem habet rectangulum lineæ G in H, deminutum semisse A lineæ, ad rectangulum duplæ F in H, deminutum semisse A lineæ. Quapropter rectangulum duplæ F, in H, deminutam semisse A lineæ, siue rectangulum duplæ F, in H, dempto rectangulo duplæ F, in dimidiam A, æquale est quadranti A quadrati, & F quadrato, deminutis rectangulo duplæ F in dimidiam A. Suppleatur in vtraque æquationis parte rectangulum duplæ F, in dimidiam A, & dematur vtrimque F, quadratum. Æqualitas tandem existet inter rectangulum duplæ F in H, dempto F quadrato, & inter dimidiæ A, quadratum. Rectangulum autem cognitum quadrato cognito deminutum, inueniatur quadrato L, æquale. Erit linea L, æqualis dimidiæ A, & dupla L, toti A basi priùs ignoratæ.

Capvt VII.

Aliæ item tres eiuſdem problematis Analyſes, vna è Nonio Algebrica, altera parametrica, tertia Geometrica, ſibi inuicem reſpondentes: quibus adduntur nonnulla ad methodum noſtram pertinentia.

Analysis Algebrica.

QVia non omnibus ſemper in mentem veniunt lemmata explicandis problematum nodis accommodata: noluit Petrus Nonius Regiomontani lemma vſurpare: tamet ſi fateatur eius beneficio commodiorem aliquanto ratiocinationem euadere. Et nos eumdem Nonium imitati, ſolas Euclidis propoſitiones Ariadnæo Analyticæ filo intexemus. Perpendiculum, differentia laterum, differentia ſegmentorum dentur, & iiſdem numeris æſtimentur quibus antea. Statuatur verò minus baſis ſegmentum eſſe vna radix. Erit maius ſegmentum, vna radix aucta quaternario. Quadratum minoris ſegmenti iunctum perpendiculi quadrato, efficit quadratum vnum auctum numero centum quadraginta quattuor, æquale minoris lateris quadrato. Sed quadratum maioris ſegmenti iunctum perpendiculi quadrato, æquatur quadrato maioris lateris, efficiturque quadratum vnum, octo radicibus & numero centum ſexaginta auctum. Itaque minus latus erit radix vniuerſalis vnius quadrati plùs centum quadraginta quattuor. Maius latus cenſebitur radix vniuerſalis vnius quadrati octo radicibus & numero centum ſexaginta aucti. Et quoniam maius latus differt binario à minori latere, æqualitas verſabitur inter duo plùs radice vniuerſali vnius quadrati, iuncti numero centum quadraginta quattuor; Et inter radicem vniuerſalem vnius quadrati, octo radicibus & numero centum ſexaginta iuncti. Æqualitas inde alia naſcetur inter quadrata earumdem quantitatum, nempe inter vnum quadratum auctum numero centum quadraginta octo, nec non radice vniuerſali ſedecim quadratorum, duobus millibus trecentis quatuor iunctorum; Et inter quadratum vnum octo radicibus & numero centum ſexaginta iunctum. Demantur vtrimque vnum quadratum &

numerus centum quadraginta octo. Supererit radix vniuersalis sedecim quadratorum duobus millibus, trecentis quattuor iunctorum, æqualis octo radicibus & numero duodecim. Ducatur vtraque pars æquationis in seipsam. Ita enim sexaginta quattuor quadrata, centum nonaginta duabus radicibus, & numero centum quadraginta quattuor aucta, æquabuntur sedecim quadratis numero duorum millium trecentorum quattuor iunctis. Demantur vtrimque sedecim quadrata & numerus centum quadraginta quattuor. Reliqua fient quadraginta octo quadrata, iuncta centum nonaginta duabus radicibus, æqualia numero absoluto duorum millium centum sexaginta. Et facta vtriusque partis per numerum quadratorum diuisione: quadratum vnum plus quattuor radicibus æquabitur numero absoluto quadraginta quinque. Valor vnius radicis siue minoris segmenti deprehendetur esse quinque. Maioris segmenti valor, nouem, &c.

Analysis Parametrica.

Perpendiculum datum fuit B, differentia segmentorum data fuit, C & differentia laterũ fuit linea D. Statuatur minus basis segmentum esse A linea. Maius proinde segmentum erit A, linea iuncta C lineæ. Perpendiculi B, quadratum iunctum minoris segmenti A quadrato, efficit quadratum minoris lateris. Sed maioris lateris quadratum, æquatur perpendiculi & maioris segmenti quadratis, nempe B quadrato, A quadrato, C quadrato & rectangulo duplæ C in A. Itaque minus latus trianguli, erit radix vniuersalis B quadrati & A quadrati. Maius latus censebitur radix vniuersalis B quadrati, A quadrati, C quadrati & rectanguli ex dupla C in A. Et quoniam maius latus differt linea D, à minori latere æqualitas versabitur inter D, nec non radicem vniuersalem B quadrati iuncti A quadrato. Et inter radicem vniuersalem B quadrati, A quadrati C quadrati, & rectanguli ex dupla C, in A. Æqualitas inde alia nascetur inter quadrata earũdem quantitatum, nempe inter D quadratũ, B quadratũ, A quadratum iuncta duplæ radici planæ vniuersali, D quadrati in B quadratum, nec non D quadrati in A quadratum. Et inter B quadratum, A quadratum, C quadratum, nec non rectangulum duplæ C, in A. Demantur vtrimque B quadratum, & A quadratum. Supererit D quadratum iunctum duplæ radici planæ & vniuersali

D quadrati in B quadratum, nec non D quadrati in A quadratum, æquale C quadrato, nec non rectangulo duplæ C, in A. Vnde intelligitur C, quadratum esse maius D quadrato. Si enim æqualia essent hæc quadrata; ijsdem vtrique æquationis parti ademptis, superesset rectangulum duplæ C in A, æquale radici planæ duplæ & vniuersali D, quadrati in B quadratum iuncti D, quadrato in A quadratum. Et vtraque æquationis parte in sese ducta, quadruplum C quadrati in A quadratum, æquaretur quadruplo D quadrati in B quadratum, nec non quadruplo D quadrati in A quadratũ: quod fieri non potest, cum ex aduersarij hypothesi, D quadratũ, sit æquale C quadrato, ac propterea quadruplum D quadratum, in A quadratum, æquale quadruplo C quadrato in A quadratum. Multo grauiùs premeretur aduersarius, si fingeret C quadratum minus esse D quadrato. Nam C quadratum vni æquationis parti detractum relinqueret solum rectangulum duplæ C, in A; & ablatum idem C quadratum à maiori (vt fingitur) quadrato D, alterius partis, relinqueret aliquod planum, quod simul cum dupla radice plana & vniuersali D quadrati in B quadratum, iuncti D quadrato in A quadratum, æquaretur duplæ C, in A rectangulo. Et æqualibus quantitatibus in seipsas ductis quæ procrearentur, forent æqualia. Atqui dupla radix plana & vniuersalis ducta in seipsam solam, procreat quadruplum D, quadrati, in B quadratum, & quadruplum D quadrati, in A quadratum. His autem quomodo æquabitur quadruplum C, quadratum in A quadratum, siquidem quadruplum D, quadratum ponitur maius quadruplo C quadrato: Hoc est ex 15. prop. lib. 5. D, quadratum maius C quadrato? Quare nec æquale est nec minus C, quadratum D quadrato, sed maius: poteritque D quadratum vtrimque auferri. Et quidem in vna æquationis parte ablatum à maiori C quadrato, relinquet aliquod F, quadratum iunctum rectangulo duplæ C, in A æquale duplæ radici planæ & vniuersali D, quadrati in B quadratum, nec-non D quadrati in A quadratum, quæ sola magnitudo alteri parti relinquitur. Et facto æqualium magnitudinum ductu in seipsas prouenient F, quadrato quadratum, quadruplum C, quadrati in A quadratum, & F quadratum bis in duplam C, in A, æqualia quadruplo D, quadrato in B quadratum, & quadruplo D quadrati in A quadratum. Auferatur vtrimque quadruplum D, quadrati in A quadratum. Et quidem in priori æquationis parte ablatum quadruplo C quadrato in A quadratum, relinquet aliquod G quadratum,

in A quadratum quod vna cum F quadratiquadrato, & F quadrato bis in duplam C, in A, æquabitur quadruplo D quadrato in B quadratum posterioris partis. Fiat vt C quadratum ad duplum F quadrati, hoc est, vt G linea ad H lineam; ita rectangulum ex dupla C in A, ad rectangulum ex L in A. Eritque G, quadratum in L in A, factum sub extremis, æquale F quadrato bis siue duplo F, quadrato in duplam C in A, facto sub medijs. Fiat etiam vt G quadratum ad F quadratum; ita ipsummet F quadratum ad M quadratum. Et G quadratum in M quadratũ, æquabitur F quadrati-quadrato. Fiat denique vt G quadratum ad duplæ D, quadratum; ita B quadratum, ad N quadratum. Eritque G quadratum in N quadratũ, æquale quadruplo D quadrati, in B quadratum. His quasi adstructionibus, siue applicationibus peractis æqualitas pronunciabitur inter G quadratũ, in A quadratum, G quadratum, in L, in A, G quadratũ in M quadratum; & inter G quadratũ, in N quadratum. Et quia eadem magnitudo (G quadratum) ducta in magnitudines vtriusque partis, procreauit hinc, inde planoplana æqualia; constat etiam magnitudines vtriusque partis, in quas ducta fuit, esse inter se æquales: nempe A quadratum, iunctum rectangulo L, in A, & M quadrato, æquari N quadrato. Detrahatur vtrique æquationis parti M quadratum. Et quidem in posteriori parte detractum N quadrato relinquat P quadratum. Ergo A, quadratum iunctum rectangulo L in A; siue rectangulum ex A linea, in ipsammet A, continuatam L linea, æquabitur P quadrato. Eritque vt A linea ad P lineam, ita eadem P, ad A continuatam linea L. Vnde constat lineam L, esse differentiam extremarum. Cuius beneficio, nec non mediæ P; quia vtraque datur; inuenientur extremæ, atque adeo ipsa A, siue minus segmentum basis quæsitum.

Analysis, planorum comparationi acquiescens Geometrica.

LATVS quadrati æqualis B quadrato, & A quadrato, est minus trianguli latus. Eiusdem autem trianguli maius latus censetur æquari lateri quadrati æqualis B, quadrato; A, quadrato; C quadrato & rectangulo duplæ, C, in A. Si laterum trianguli differentia D, ad minus latus fuerit adiuncta, idem æquabitur maiori lateri; nec non eorumdem quadrata inter se, æqualia erunt. Differentiæ laterum continuatæ minori latere, quadratum constituitur ab his

planis; D quadrato, B quadrato A, quadrato, nec non rectangulo duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadrato, & A, quadrato. Quibus planis cùm æqualia sint plana constituentia quadratum maioris lateris, nempe B quadratum, A quadratum, C quadratum, & rectangulum duplæ C, in A, licebit vtrique parti communia quadrata auferre; B videlicet quadratum, & A quadratum; vt supersit æqualitas inter C quadratum, iunctum rectangulo duplæ C, in A; & inter D quadratum iunctum rectangulo duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadatro & A, quadrato. Ipsum porrò D quadra tum, non est æquale C quadrato. Alioqui post ademptum C quadratum vni, & D quadratum, alteri æquationis parti, relinqueretur rectangulum duplæ C, in A, æquale rectangulo duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadrato & A quadrato. Et quia D quadratum fingitur, æquari C quadrato, etiam linea D, lineæ C, & per 15. prop. lib. 5. dupla duplæ æqualis erit: nec non æqualia rectangula sub æqualibus altitudinibus, bases habebunt æquales: id est duplæ C, in A, rectangulum æquale rectangulo duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadrato & A quadrato, habebit basim A, æqualem lateri quadrati æqualis B & A quadratis, quod repugnat 18. & 47. prop. lib. 1. Nec potest statui D, quadratum maius C quadrato. Nam ademptum C quadratum vni æquationis parti relinqueret rectangulum duplæ C, in A: & ademptum C quadratum maiori (vt fingitur) D quadrato alterius partis relinqueret, aliquod planum quod rectangulo duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadrato, & A quadrato iunctum, æquaretur rectangulo duplæ C, in A: Cùm tamen rectangulum duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadrato, & A, quadrato, duplam D altitudinem maiorem habeat dupla C, propter quadratum D, maius positum C, quadrato; nec non basim, quæ est latus quadrati æqualis B quadrato, & A quadrato; maiorem basi A, ex adnotatis primi libri propositionibus, neque potest rectangulum sub vtraque maiori linea, non esse maius eo quod sub vtraque breuiori continetur. His incommodis coactus aduersarius fatebitur D quadratum, nec æquale, nec maius; sed C quadrato minus esse; ac propterea D, quadratum vtrique æquationis parti, ita posse detrahi, vt vni parti relinquatur solum rectangulum duplæ D, in latus quadrati æqualis B quadrato & A, quadrato. Post ademptum verò D quadratum, maiori C, alterius partis quadrato relinquetur aliquod planum vt duplæ C in F, quod iunctum duplæ C in A, constituet

totum

totum rectangulum duplæ C, in lineam F, auctam linea A. Et hoc rectangulum æquabitur reliquo ex dupla D, in latus quadrati æqualis B quadrato, & A quadrato. Vt igitur dupla C, ad duplam D, siue per 15. prop. lib. 5. vt C ad D: ita reciprocè per 14. prop. lib. 6. est latus quadrati æqualis B, quadrato & A quadrato; ad F, lineam auctam A, linea. Quare & earum linearum quadrata sunt proportionalia: C quadratum, ad D quadratum; vt B quadratum & A quadratum; ad F, quadratum auctum A, quadrato, nec-non rectangulo duplæ F, in A. Et quia primus analogiæ terminus maior est secundo: etiam plana constituentia tertium, maiora sunt planis quartum analogiæ terminum constituentibus. Detrahantur minora maioribus. Et quidem communi A, quadrato vtrimque ablato, relinquetur tertio termino solum B quadratum maius reliquis duobus quarti termini planis, nempe F quadrato, & rectangulo duplæ F, in A. Ac propterea F, quadratum B quadrato maiori ademptum relinquet, aliquod planum duplæ F, in G, quod deminutum rectangulo duplæ F, in A, censebitur excessus quo tertius terminus superat quartum. Et per diuisionem rationis erit, vt excessus quo D quadratum superatur abs quadrato C, ad ipsummet D quadratum: hoc est vt quædam H linea ad lineam L: ita rectangulum duplæ F in G, deminutum rectangulo duplæ F, in A; ad F quadratum auctum A quadrato, nec-non duplæ F, in A, rectangulo. Fiat vt H ad L, ita dupla F, ad M. Eritque vt dupla F, ad M: ita rectangulum duplæ F, in G, deminutum rectangulo duplæ F, in A, siue rectangulum duplę F, in G, lineam deminutam A linea; ad plana tertio alterius analogię termino detracta. Verumenim-verò quam habet rationem, dupla F, ad M, eamdem quoque, habet rectangulum duplæ F, in G, deminutam A, linea, ad rectangulum M, lineæ in G, deminutam A, linea. Qua propter rectangulum M, lineæ in lineam G, deminutam A, linea: siue rectangulum M, in G, deminutum rectangulo M, in A, æquale est planis detractis; nimirum F quadrato A quadrato & rectangulo duplæ F in A. Vtrique æquationis parti addatur rectangulum lineę M, in A: Vtrique dematur F quadratum. Supererit rectangulum M, in G, deminutum F, quadrato æquale A, quadrato, nec-non rectangulo M, lineæ continuatæ dupla F, in A. Hoc quadratum ignotum, cum ignoto rectangulo, nihil aliud est per 3. prop. lib. 2 quàm rectangulum ex A, in ipsammet A, continuatam linea M, & dupla F. Si igitur rectangulum cognitum quadrato cognito deminutum,

F

inueniatur N quadrato æquale: Erit N linea continuæ proportionis media inter extremas quarum minor erit A. Ea verò linea quæ conflatur ex ipſamet A, nec-non ex M & dupla F, erit maior extrema. Itaque M, iuncta duplæ F, eſt differentia extremarum. Cuius & mediæ N beneficio, quia vtraque datur, dabuntur extremæ; atque adeò linea A, ſiue minus ſegmentum baſis quæſitum.

Additamenta nonnulla methodum noſtram ſpectantia.

SEGMENTORVM baſis à perpendiculo factorum differentia & laterum trianguli differentia, numeris datæ quam habeant inter ſe rationem facilè intelligitur. Lineis verò datæ non niſi lemmate, vel ratiocinatione cognoſci poteſt quomodo inter ſe affectæ ſint. Neceſſe igitur fuit Analyſes huius capitis parametricam & Geometricam diſſimulato Regiomontani lemmate longiores euadere. Aliquando hac incerta linearum natura, vel aliarum in alias ductu cogimur poſitionem aliter inſtituere. Nam ſecundum & octauum è Varijs Ghetaldi; tertium item & quartum appendicis prioris ad Apollonium Gallum, experti ſumus, non quouis modo inſtituta poſitione explicari. Pertinent autem ad ſextam claſſem noſtrorum problematum, quemadmodum & poſterius Regiomontani problema quod hactenus perſecuti ſumus. Quintæ claſſi tribuimus Zeteticum ſecundum & nonum ſecundi libri apud Vietam, & ſi qua his ſimilia planoplanorum comparationem videntur expoſcere. Ea, nos trium rectangulorum ope, eamdem altitudinem & baſes continuè proportionales habentium, nec non inter baſim vnius, & communem altitudinem mediæ proportionalis inuentione exhibemus, planoplanis valere iuſſis.

Capvt VIII. et Vltimvm.

Obiter indicantur eiusdem problematis quod Regiomontani posterius est, aliæ duæ constructiones. Noua item duo problemata construntur, & demonstrantur, &c.

SI perpendiculum datum & differentia segmentorum basis ab eo factorum data constituantur ad rectum angulum, & ex medio, eiusdem differentiæ puncto descendat, aliud perpendiculum indefinitæ magnitudinis; constat in eo esse vnum dimetientis per quod transit circulus triangulo quæsito circumscribendus, extremum. Nam ex ijs quæ secundo capite dicta sunt, basis sectæ in semisses, medium punctum, idem etiam est medium differentiæ quæ est inter segmenta eiusdem basis vtcũque sectæ. Basis autem trianguli inscripti circulo secatur semper ab aliqua eius dimetiente ad rectos angulos, & media per 3. prop. lib. 3. Et quia tres lineæ sunt continuè proportionales, differentia segmentorum basis à perpendiculo factorum, differentia laterum trianguli & differentia segmentorum basis pro ratione laterum sectæ: (Id enim capite quinto demonstrauimus) ex duabus primis datis, tertia per xi. prop lib. 6. inuenietur. Quod si huius inuentę semissem rescindamus è semisse illius differentiæ, quæ prima cum perpendiculo ad angulum rectum constituta est, facto initio ab eo puncto quod idem medium basis punctum esse diximus, inuentum erit aliud punctum per quod linea bisecans angulum ad verticem trianguli quæsiti ducenda est; atque adeo inuenietur eadem linea, & alterum dimetientis extremum, cui nempe ipsa à vertice trianguli descendens occurrit, infra basim descendenti à medio eiusdem basis puncto. Ad lineæ autem bisecantis angulum trianguli alterum extremum, quod idem est vertex eiusdem trianguli: si excitetur lineæ bisecanti, alia perpendicularis; occurret vtique reliquo dimetientis puncto extremo: & cætera quæ ad constructionem pertinent mediocriter exercitatis in mentem venient. Aliter denique construitur problema. Si duplum perpendiculi dati & differentia segmentotum basis, ab eo factorum constituantur vt priùs ad rectum angulum: & ex eiusdem differentię altero extremo,

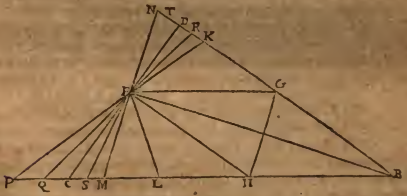
quod videlicet duplo perpendiculi commune non eſt, tamquam centro & internallo datæ laterum differentiæ circulus deſcribatur, quem alius circulus contingat, per duplicati & conſtituti vt priùs perpendiculi duo extrema deſcriptus: Conſtructio reliqua facile procedet: Sed demonſtratio ex octauo Apollonij Galli problemate petenda eſt, quod nos aliquanto planius & plenius ſi licuerit, exponere primo quoque tempore decreuimus. Immò & ſecundum è varijs Ghetaldi problema, cuius demonſtratio nonnullum in animis eorum qui accurati eſſe volunt, ſcrupulum relinquit, duorum quoque circulorum ſeſe contingentium beneficio expediri poteſt. Si enim è ſumma laterum data reſcindas differentiam ſegmentorum baſis à perpendiculo ſectæ datam, ad alterum nempe maioris lineæ extremum, quo tamquam centro & interuallo eiuſdem ſummæ laterum, deſcribas circulum quem contingat, alter circulus tranſiens per duo extrema duplicati perpendiculi, & ad rectum angulum cum differentia ſegmentorum, ita conſtituti, vt ipſi perpendiculo & differentiæ ſegmentorum commune ſit vnum extremum, quod videlicet prioris circuli centrum non eſt; præcipuam ſtructuræ difficultatem ſuperaueris. Cuius etiam demonſtrationem tuo-pte ingenio, niſi inſtitutiones noſtras exſpectare malueris, inuenies. Duo interim noua problemata quæ ſuperiorum analyſeon veluti condiendis, aut abſtergendis moleſtijs, ſeſe obtulerunt, damus apertiùs conſtructa & demonſtrata.

NOVVM PROBLEMA.

Super data recta linea triangulum rectangulum conſtituere, cui & alijs triangulis quotlibet, tum obtuſangulis, tum acutangulis inſcribi demonſtretur quinquangulum ordinarium.

QVinquangulum ordinarium ſiue pentagonum regulare, & omnino figura figuræ inſcribi dicitur; quando omnes anguli minoris ſunt in perimetro vel lateribus maioris. Super data igitur recta B C, triangulum vt propoſitum eſt, ita deſcribitur. Ad alterum lineæ datæ extremum putà B, conſtituitur angulus C B N, æqualis duabus quintis vnius recti anguli, quantus nimirum comprehenditur

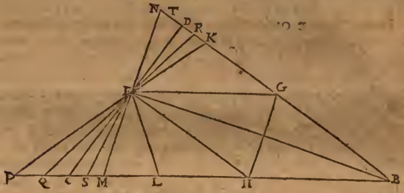
æqualibus cruribus trianguli quod ab Euclide, lib. 4. probl decimo constructum est. Ab altero autem datæ rectæ extremo C, in lineam B N, indefinitæ magnitudinis, demittendum est perpendiculum C D: & secandus angulus B C D in semisses à recta B F, quæ rectæ C D, occurrat in F. Et quia F B D angulus quintam partem recti anguli capit; angulus verò F D B rectus est: reliquus è tribus angulis qui duobus rectis, per 32. prop. lib 1. æquantur, capiet quattuor quintas anguli recti, quibus si dematur D F K, vnius recti quinta pars, supererit angulus K F B, tribus quintis anguli recti æqualis. Et secabit linea F K producta, latus B D, angulo D F B, quem ipsa secat, oppositum. Cúmque duo anguli K F B, & F B K simul efficiant tantum quattuor quintas anguli recti, tertius angulus trianguli F K B, æqualis erit sex quintis vnius recti; quantus nempe est angulus duobus lateribus quinquanguli ordinarij comprehensus ex coroll. prop. 11. lib. 4. cæterùm angulus B F C, capit etiam sex quintas vnius recti. Nam iunctus angulo B F D, æquatur duobus rectis: angulus verò B F D tantum quattuor quintas capiebat vnius recti, quæ iunctæ sex quintis, efficiunt decem quintas vnius recti, siue duos angulos rectos. Secetur ergo B F C, angulus in semisses à recta F L, quę rectam C B, eidem angulo oppositam secet, producta in L. Erit angulus B F L, æqualis tribus quintis vnius recti. Et triangulum B F L, angulos ad B, & F, æquales angulis ad B, & F, trianguli B F K, nec-non latus B F,



cum eo commune habebit; atque adeo per 26. p. l. 1. reliquum angulum F L B, reliquo angulo F K B, hoc est, sex quintis vnius recti æqualem; latera item reliqua, reliquis alterius lateribus æqualia; quæ

nimirum æqualibus angulis opponuntur, latus ſcilicet F L, æquale F K lateri, & latus B L, æquale B K lateri. Sunt autem anguli ad F, in vtroque triangulo maiores angulis ad B; ac propterea latera B L, & B K, maiora ſunt lateribus F L, & F K. Reſcindatur ex B L, linea L H æqualis lineæ F L: & ex B K, linea K G, æqualis lineæ F K, connectatúrque G H Et quia æqualibus fuerunt ablatę æquales; ſunt reliquę B H, & B G, æquales. Angulus verò G B H, cùm ſit æqualis duabus quintis recti anguli; capient ſimul reliqui ad baſim, octo quintas vnius recti, & ſinguli quattuor quintas. Itaque anguli L H G, & K G H, per 13. l. 1. capient ſinguli ſex quintas vnius recti. Et quinquangulum K F L H G, æqualiũ eſt omnium inter ſe angulorum qui etiam conſtituti ſunt in lateribus trianguli B C D. Et quattuor reliqua latera, æqualia ſunt inter ſe effecta. Supereſt vt probemus, etiam quintum latus G H, æquale eſſe cuius vni laterum reliquorum, quod ſit K G. Iungantur ergo rectæ F H, & F G. Triangula profectò F K G, & F L H, ex conſtructione crura inter ſe æqualia, & ijs comprehenſos angulos æquales habent; & ex 4. p. l. 1. baſis F G, baſi F H, nec-non angulus F G K, angulo F H L, æquari deprehenditur. Quòd ſi hi duo æquales, detrahantur angulis K G H, & L H G, inter ſe æqualibus, relinquentur æquales inter ſe F G H, & F H G, anguli. Hoc eſt ſi duæ quintæ vnius recti, quot partium eſt vterque angulus K G F, & L H F, detrahantur ſex quintis recti anguli, quot partium eſt vterque angulus K G H, & L H G, relinquentur hinc, inde quattuor quintæ vnius recti; quot partium erit vterque angulus F G H, & F H G; ac propterea angulus G F H, ad verticem trianguli complectetur duas quintas vnius recti: nec-non triangulum ipſum F H G, ſimile erit ei quod conſtruxit Euclides lib. 4. probl. 10. Itaque definitio lineæ media & extrema ratione ſectæ, cum adnotati proximè problematis demonſtratione patefacient lineæ F G ad lineam H G, eſſe eam rationem, quæ eſt totius lineæ media & extrema ratione ſectæ, ad maius ſui ſegmentum: At eadem quoque eſt ratio eiuſdem F G ad latus K G, ex 8. p. l. 13. Nam triangula F K G, & F L H, ſimilia ſunt duobus triangulis quorum baſes ſeſe interſecant in illius propoſitionis diagrammate. Quare latus K G, lateri H G æquale eſt, & quinquangulum conſtruximus omnium inter ſe laterum, & angulorum inter ſe æqualium; quod non ſoli triangulo C D B, ſed alijs quotlibet inſcribetur. Producatur enim linea K F, in occurſum lineæ B C, productæ verſus P: quia hæ duæ lineę cum linea B K, duos

constituunt angulos minores duobus rectis, concurrant necesse est, puncto P. Et triangulo P K B, obtusangulo inscriptum erit quinquangulum K F L G H. Agatur iam lineę H G, æquidistans M F N; cui occurret linea B G, producta in N: & linea B H, in M: propterea



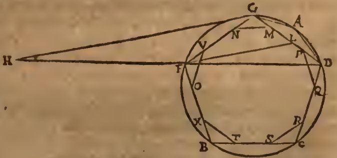
quod recta B F secat, æquidistantes H G & M F N, ad rectos angulos; & acuti sunt tantùm anguli N B F & M B F. Hoc est, rectæ N F, N B ad vnam partem rectæ F B, constituunt duos angulos minores duobus rectis, quemadmodum etiam rectæ M F, M B, ad alteram eiusdem F B partem. Itaque efficitur triangulum B N M, simile triangulo B G H acutangulo: & ipsi B N M triangulo inscriptum est quinquangulum ordinarium. Sumptis denique inter puncta P & C, atque etiam inter C, & M, quotlibet punctis, vt Q & S. Et per ea puncta, & punctum F, ductis quotlibet rectis, vt Q F R, & S F T, concurrent eæ cum latere B N; propterea quòd sunt anguli R Q B, & T S B, singuli minores angulo N M B, trianguli acutanguli. Sed triangulum Q R B, obtusangulum erit; quia ei communis est, cum triangulo rectangulo C B D, angulus ad B: & R Q B, angulus minor est exteriori D C B. Quare B R Q, maior erit recto B D C; minor tamen obtuso B K P: quia R Q B exterior, est maior angulo K P B; communis autem est angulus ad B, triangulis obtusangulis, B P K, & B Q R. Punctum igitur R, cadit inter puncta D, & K: atque ita triangulo B Q R, etiam inscriptum est quinquangulum. Triangulum verò S T B, acutangulum erit, ob communem cum triangulo rectangulo, angulum ad B, & maiorem T S B, interiori D C B: vnde S T B, angulus minor erit recto C D B; & punctum D cadet vltra D,

versus N; inscriptúmque erit triangulo S T B, quinquangulum ordinarium. Hæ demonstrationes, alijs etiam innumeris accommodari possunt. Quare factum est quod oportuit.

Alivd item novvm Problema.

Datæ figuræ ordinariæ, quotuis laterum, aliam ordinariam duplo laterum numero inscribere.

Data esto figura quæuis ordinaria B C D F G, cui per ea quæ docet Euclides lib.4. circumscribatur circulus F G A D; & secta sit G A D, bifariam in A, & æqualibus arcubus subtendantur rectæ A G, A D: quæ ideo sunt æquales, & constituunt duo latera figuræ alterius ordinariæ duplo laterum numero comparatæ ad datam. Connectatur recta D F, opposita vni angulo datæ figuræ; producatúrque in H, vt sit F H, extra circulum, dupla lateris F G: & connexæ H G, æquidistans ducatur F L, quæquidem secabit latus G D, angulo G F D, oppositum; cùm sit angulus H F L, maior angulo H F G. Alioquin F L, concurreret cum H G; cui tamen æquidistans, & ad eamdem partem lineæ H F D, ducitur. Cadit igitur F L, intra triangulum G F D, & producta secat latus, angulo vnde ducta est,



oppositum, puncto aliquo L. Secetur G L, in semisses puncto M; & agatur recta M N, æquidistans rectę F D. Sunt G F D, & G N M similia triangula: & vt F D ad F G; ita N M, ad N G, siue M G. Et sumptis consequentium duplis, vt F D ad F H; ita N M, ad G L: Sed per 2. prop. lib. 6. vt F D, ad F H; ita quoque est D L, ad L G: ergò N M ad L G, se habet vt D L, ad L G; & sunt rectæ N M, & L D, æquales. Abscindatur recta D P, æqualis rectę G M, à recta

G D.

GD. Abſciſſæ igitur GM, & DP, à recta GD, relinquent MP, æqualem rectæ LD, quæ ſupererit abſciſſis, aut etiam ablatis æqualibus GM, & ML, ab eadem recta GD, ac propterea recta MP, rectæ NM, æqualis erit. Fiat idem in reliquis datæ figuræ lateribus; & reſectæ ſint vtrimque DQ, RC, CS, TB, BX, OF, FV, NG, ſingulæ æquales, alterutri æqualium GM, & DP: ſatis conſtat, rectas quæ in mediis lateribus relinquentur, nempe QR, ST, XO, VN, ſingulas æquales fore alterutri æqualium NM, aut MP. Connexæ autem PQ, RS, TX, OV, ſingulæ etiam æquales erunt rectæ NM: cùm ſint baſes triangulorum æqualium & ſimilium triangulo GNM. Itaque figuræ datæ aliam inſcripſimus duplo laterum numero; quam ex ordinariis eſſe probabimus. Non enim ſolùm habet omnia latera inter ſe æqualia: verùm & omnes angulos inter ſe, & angulo GAD, æquales. Siquidem quadrilateri FGAD, circulo inſcripti, duo aduerſi anguli, GAD, & GFD, ſunt duobus rectis æquales: Atqui propter æquidiſtantes lineas, etiam duo anguli FNM, NFD, ſiue GFD ſunt duobus rectis æquales: Ergò FNM angulus, angulo GAD, æqualis eſt; & per 5 prop. lib. 1. angulus quoque NMP, & reliqui infra baſes triangulorum ſimilium, & æqualium. Quare factum eſt, quod oportuit.

Sectis in trientes lateribus trianguli æquilateri, triens quiſque in lateribus medius conſtituit vnum latus ſexanguli ordinarij, quod huic triangulorum omnium ſoli inſcribitur. Octanguli ordinarij latus ad latus quadrati cui inſcribitur, rationem habet, quam binarius ad binarium auctum latere ſurdi quadrati valentis octo. Habeo de inſcribendis figuris plura. Verùm canendo receptui elegiacum minimè operoſum, minimè ambitioſum è noſtris Schediaſmatis poëticis & criticis, huc adferre non abs re fuerit.

Impoſitum ſegni puerum vectabat aſello;
Et pedibus genitor conficiebat iter:
Occurrunt (via quos eadem referebat) amici,
Obiurgantque ſenem, quòd pedes ipſe foret.
Nónne virent pueri vires? aſinóque relicto,
Hunc pedibus par eſt ire? vehique patrem?
Credidit; & natum genitor deſcendere iuſſit;
Iumenti lumbis ſeque locauit onus.
Obuius eſt alijs factus; ſtomachantur & iſti,
Quòd pedes incedat pro genitore puer.

Descendit senior; vacuum præmittit asellum;
Cum puero sequitur; vultque carere notâ.
O stultos homines! subijt quæ tertia turba,
Exclamat: pedites itis: asellus adest.
Mutata rursùm cupientes mente placere,
Sederunt asino filius atque pater.
Nec longum tempus; vocem & quartum extulit agmen:
Iumentum infelix, te graue perdit onus!
Nate (inquit genitor) pariter portemus asellum:
Id restat, ne nos lingua proterua petat.
Portabant asinum; multo magis vltima turba
Ridere, & verbis ludere pergit eis.
Non equidem posthac, hominum pugnantia curo
Iudicia: ijs placui, displicui-ve satis.

ECCE LYRA: NVM SCIS?